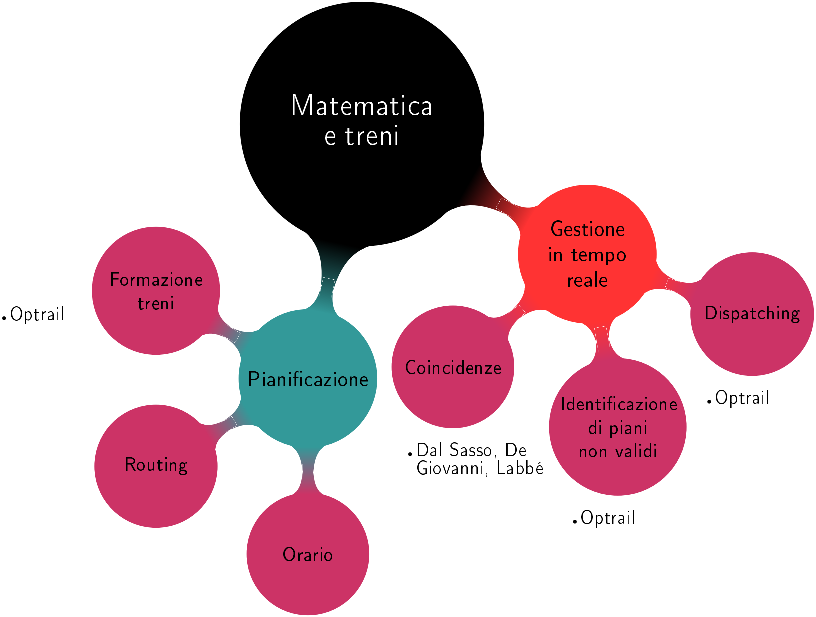
Matematica del Traffico Ferroviario

Dal Sasso Veronica

27/05/2020

DIPARTIMENTO MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

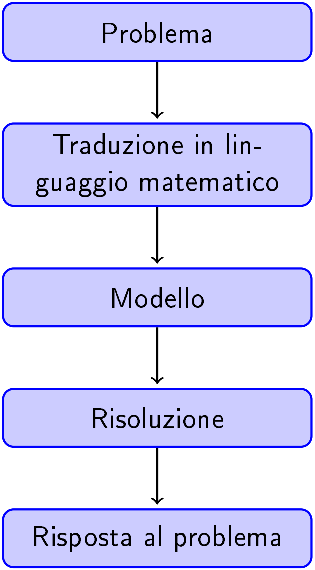
OPTRAIL
PIONEERING OPTIMIZATION


Matematica e treni
Pianificazione
Formazione treni
Optrail
Routing
Orario
Gestione in tempo reale
Coincidenze
Dal Sasso, De Giovanni, Labbé
Identificazione di piani non validi
Optrail
Dispatching
Optrail

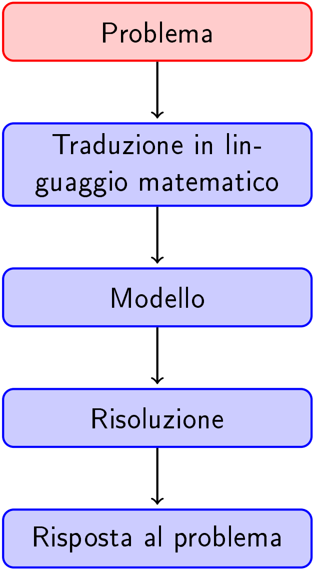
Cos'è la Ricerca Operativa?

- è una branca della matematica applicata
- trova la soluzione migliore possibile ad un problema
- è tutta attorno a voi, anche se non ve ne accorgete (Google Maps! la spesa a domicilio che arriva all'ora stabilita!)

Metodologia



Come scegliere con quali vagoni formare un treno

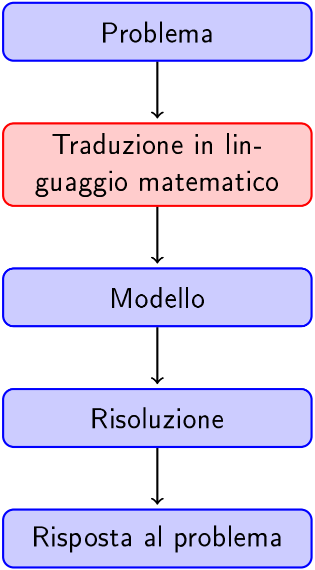


Un venditore manda ad una acciaieria vagoni di carbone e ferro. Li può trasportare con un solo treno.

- ci sono 8 vagoni di carbone a disposizione del venditore,
- per lavorare 1 vagone di ferro ho bisogno di 2 vagoni di carbone
- l'acciaieria è interessata a comperare più ferro possibile, se può anche comperare il carbone per lavorarlo
- l'acciaieria ha già 9 vagoni di carbone
- la motrice del treno può trasportare al massimo 12 vagoni

Il venditore guadagna 100$ per ogni vagone di carbone venduto e 200$ per ogni vagone di ferro. Come sarà formato il treno, per massimizzare il profitto del venditore?

Le incognite del problema



Quali sono le variabili?

- numero di vagoni di carbone (x)
- numero di vagoni di ferro (y)

Qual è il dominio delle variabili?

- l'insieme dei numeri interi positivi

Programmazione lineare intera

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

Modello

↓

Risoluzione

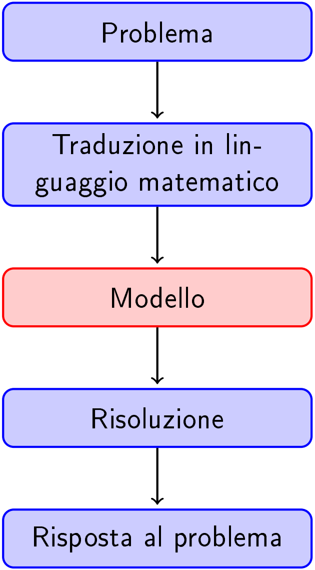
↓

Risposta al problema

s.t.

$$x, y \in \mathbb{N}^+$$

Programmazione lineare intera



Ci sono 8 vagoni di carbone a disposizione del venditore

$$\text{s.t.} \quad x \leq 8$$

$$x, y \in \mathbb{N}^+$$

Programmazione lineare intera

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

Modello

↓

Risoluzione

↓

Risposta al problema

Per lavorare 1 vagone di ferro ho bisogno di 2 vagoni di carbone e l'acciaieria ha già 9 vagoni di carbone

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x \leq 8 \\
& x + 9 \geq 2y \\
& \\
& x, y \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

Programmazione lineare intera

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

Modello

↓

Risoluzione

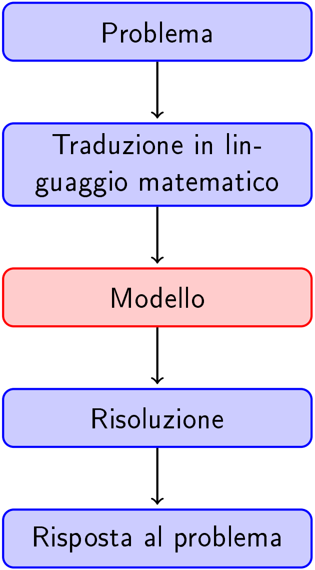
↓

Risposta al problema

La motrice del treno può trasportare al massimo 12 vagoni

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x \leq 8 \\
& x + 9 \geq 2y \\
& x + y \leq 12 \\
& x, y \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

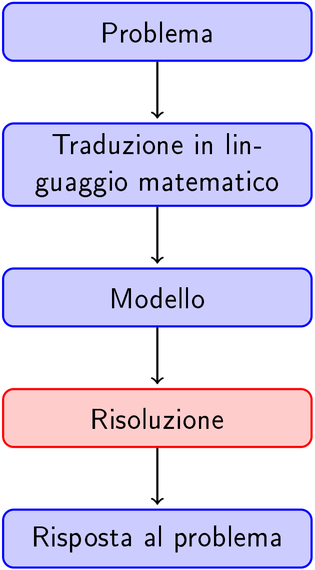
Programmazione lineare intera

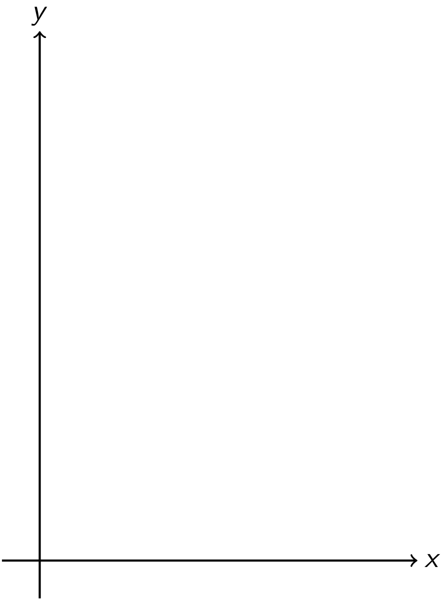


Massimizziamo il guadagno

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 100x + 200y \\
\text{s.t.} \quad & x \leq 8 \\
& x + 9 \geq 2y \\
& x + y \leq 12 \\
& x, y \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

Risoluzione grafica





Risoluzione grafica

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

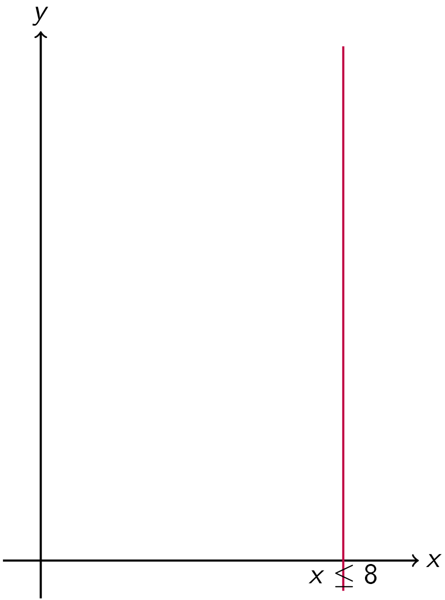
Modello

↓

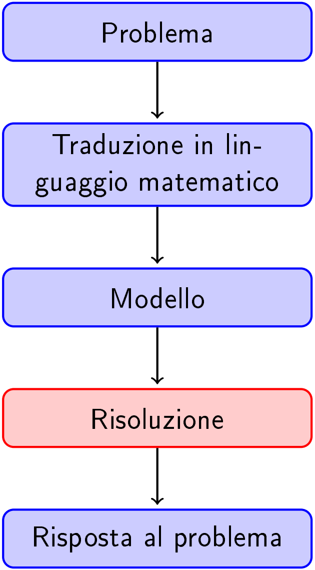
Risoluzione

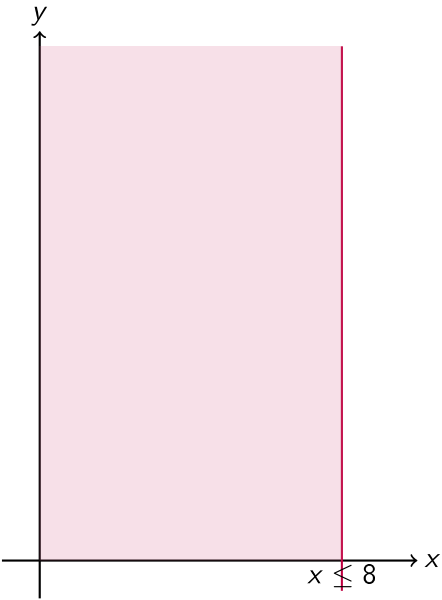
↓

Risposta al problema



Risoluzione grafica





Risoluzione grafica

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

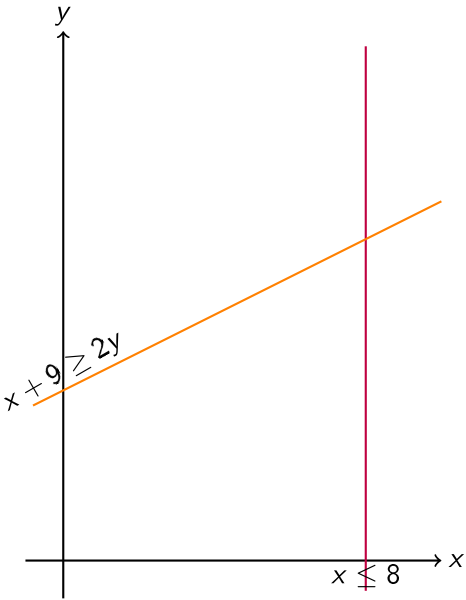
Modello

↓

Risoluzione

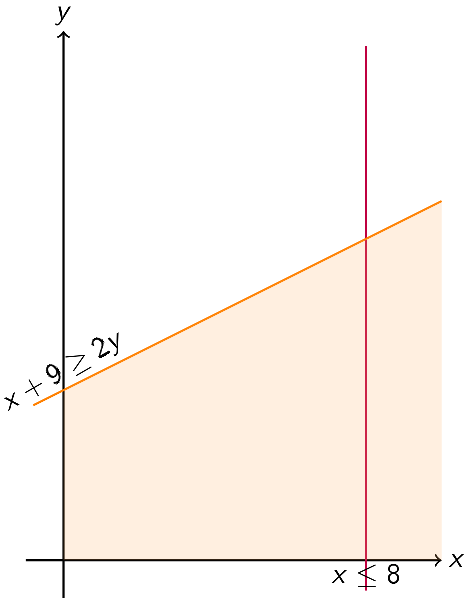
↓

Risposta al problema

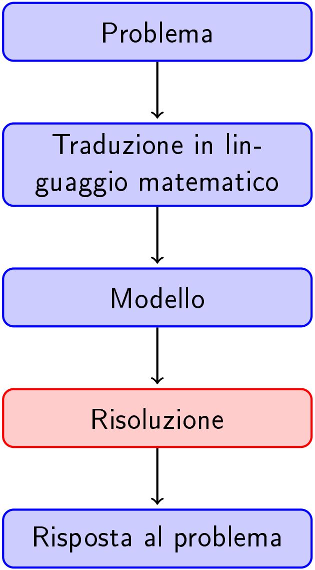


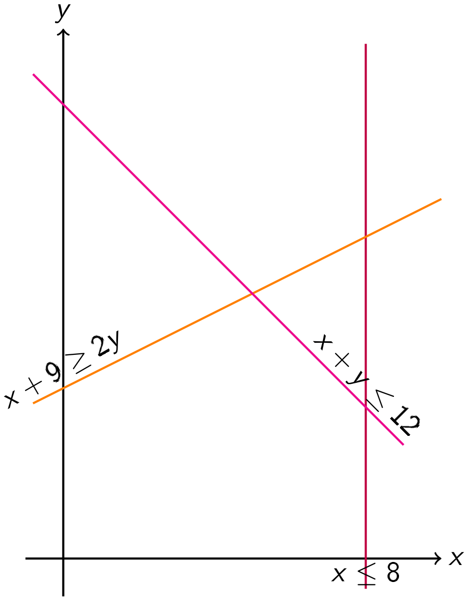
Risoluzione grafica

Problema
↓
Traduzione in linguaggio matematico
↓
Modello
↓
Risoluzione
↓
Risposta al problema

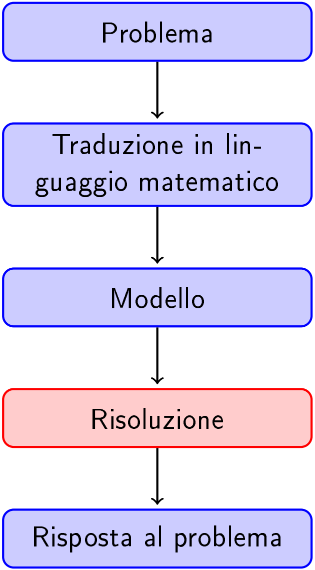


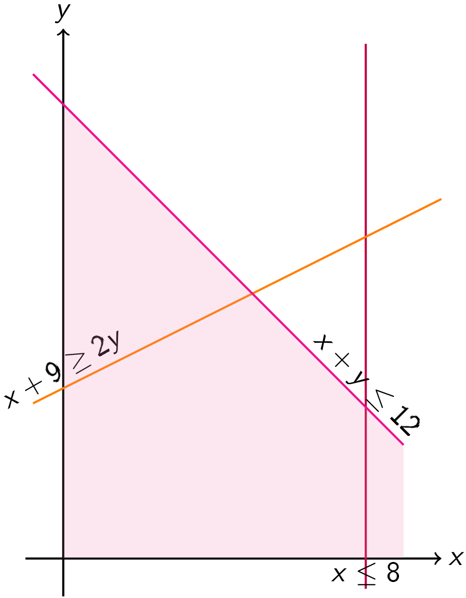
Risoluzione grafica



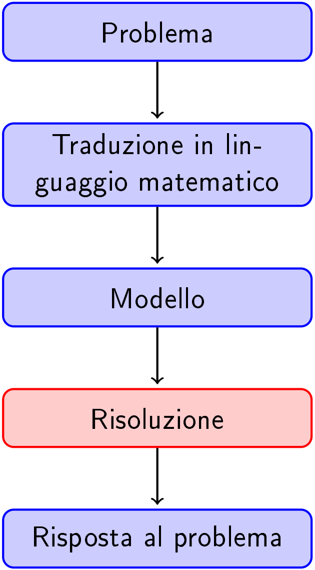


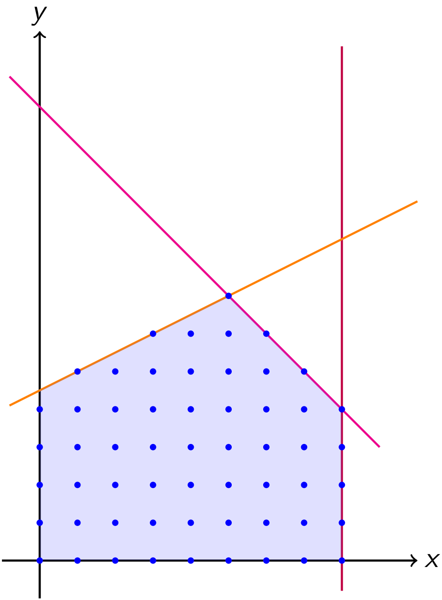
Risoluzione grafica





Risoluzione grafica





Risoluzione grafica

Problema

↓

Traduzione in linguaggio matematico

↓

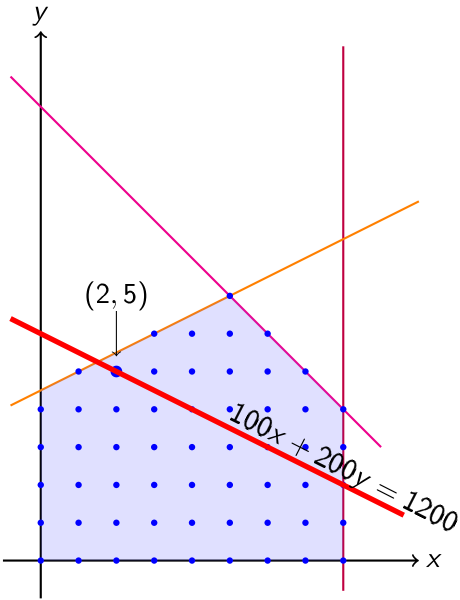
Modello

↓

Risoluzione

↓

Risposta al problema



Risoluzione grafica

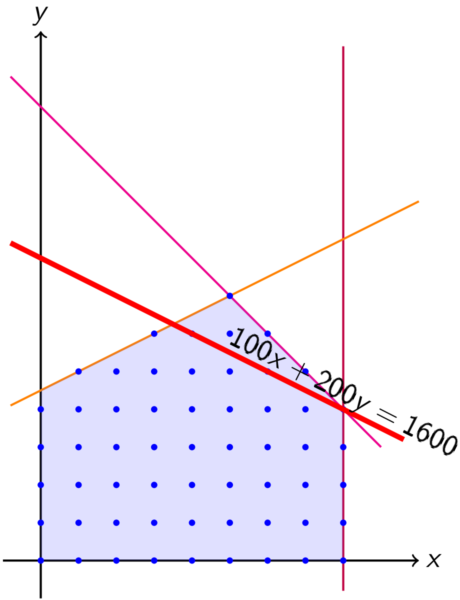
Problema

Traduzione in linguaggio matematico

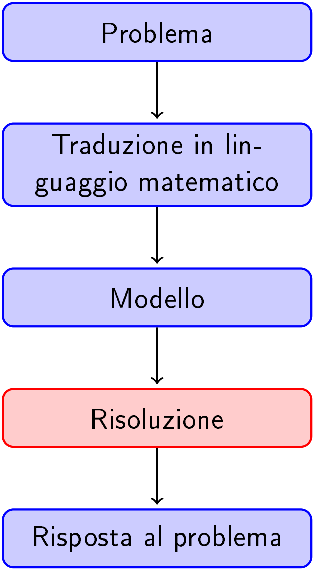
Modello

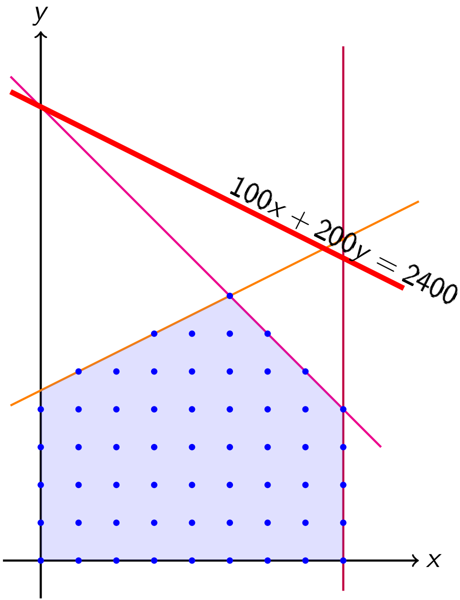
Risoluzione

Risposta al problema

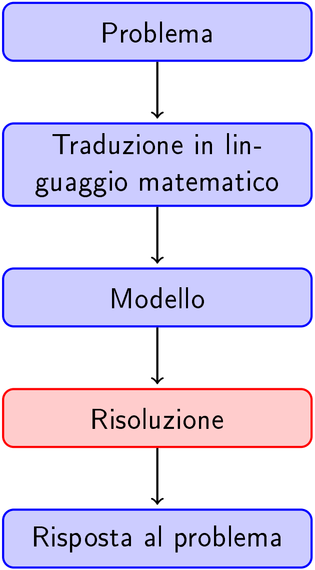


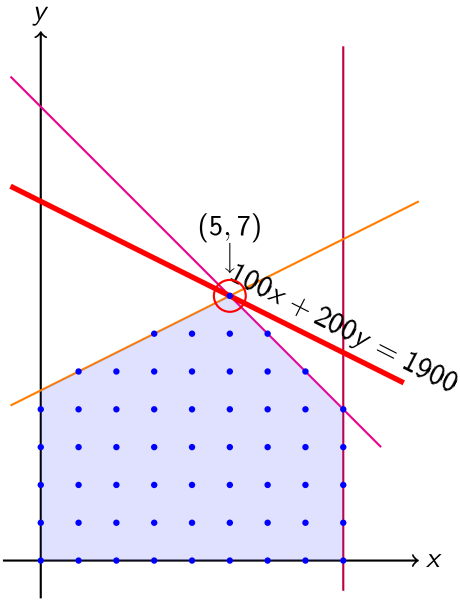
Risoluzione grafica



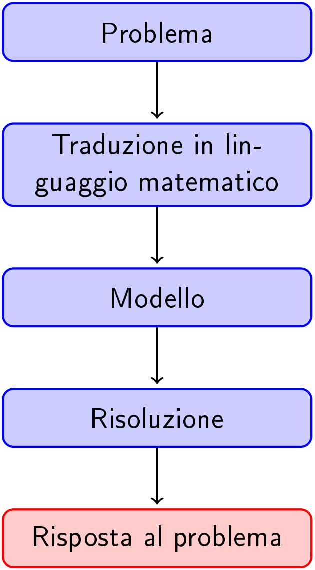


Risoluzione grafica





Abbiamo la soluzione!



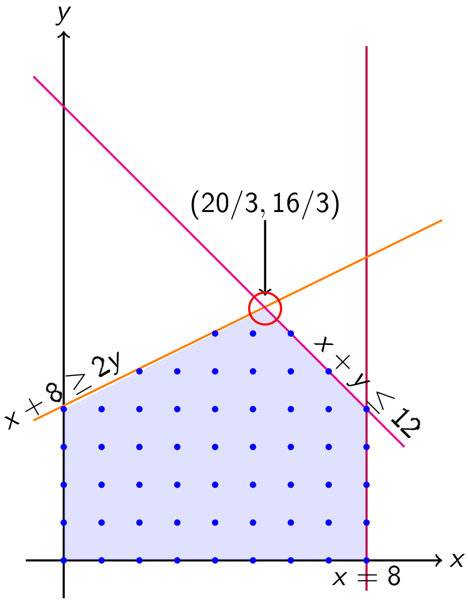
Il venditore formerà il treno con:

- 5 vagoni di carbone,
- 7 vagoni di ferro,

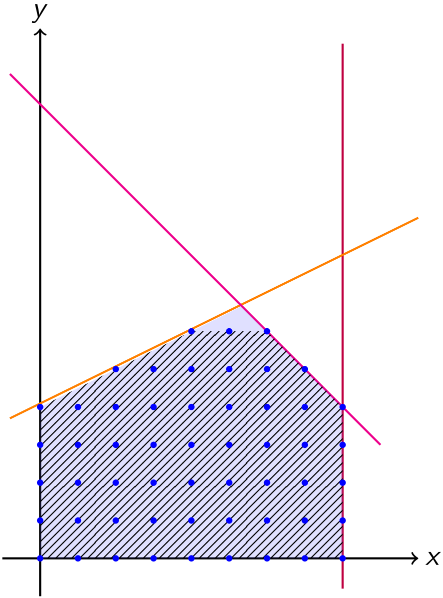
per un profitto totale di 1900$.

E se l'acciaieria avesse avuto solo 8 vagoni di carbone in rimanenza?

Piani di taglio

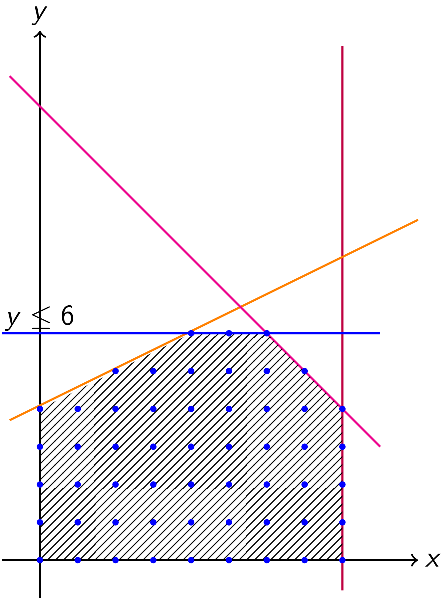


Piani di taglio



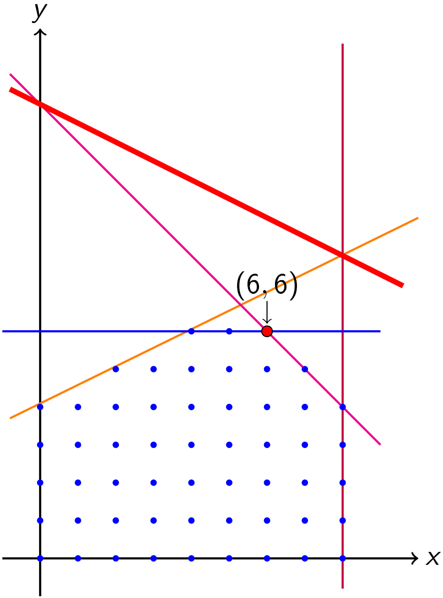
- aggiungiamo disequazioni per descrivere meglio la regione ammissibile
- i vertici sono di nuovo tutti interi
- ! Non sono sempre facili da individuare

Piani di taglio



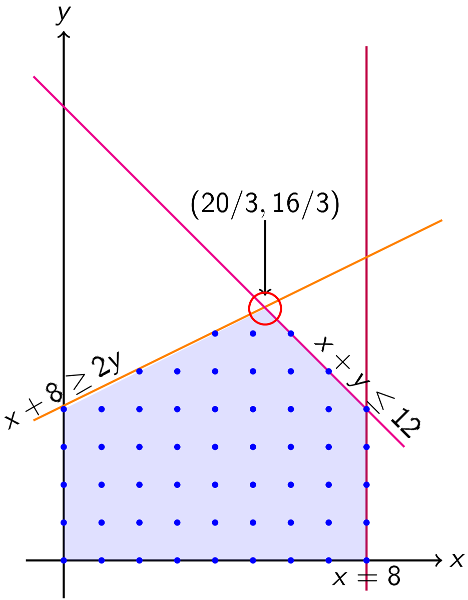
- aggiungiamo disequazioni per descrivere meglio la regione ammissibile
- i vertici sono di nuovo tutti interi
- ! Non sono sempre facili da individuare

Piani di taglio



- aggiungiamo disequazioni per descrivere meglio la regione ammissibile
- i vertici sono di nuovo tutti interi
- ! Non sono sempre facili da individuare

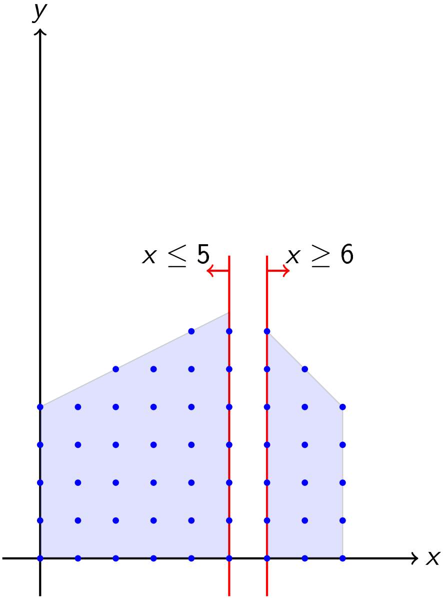
Branch-and-bound



Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

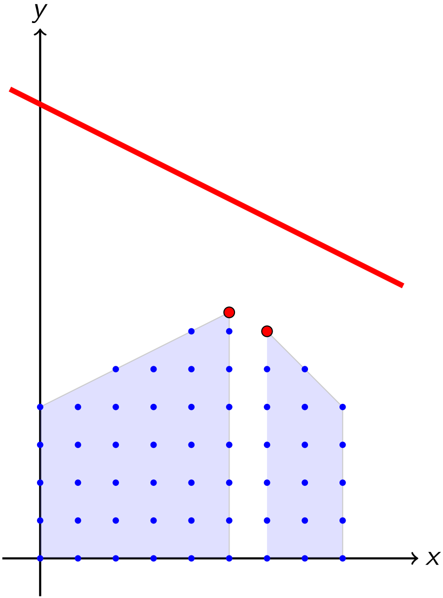
Branch-and-bound



Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

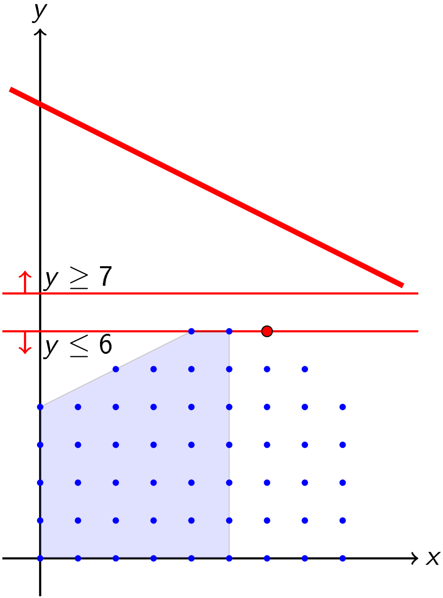
Branch-and-bound



Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

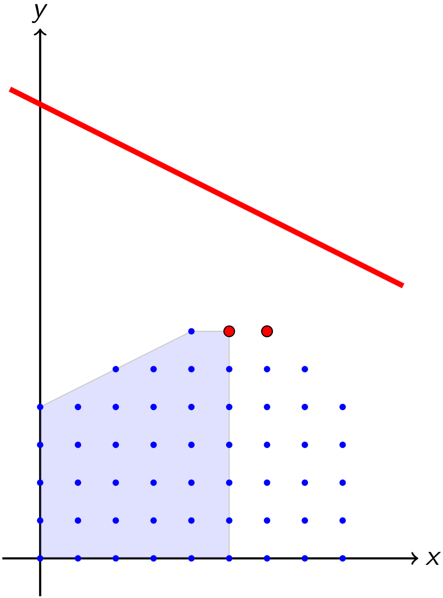
Branch-and-bound



Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

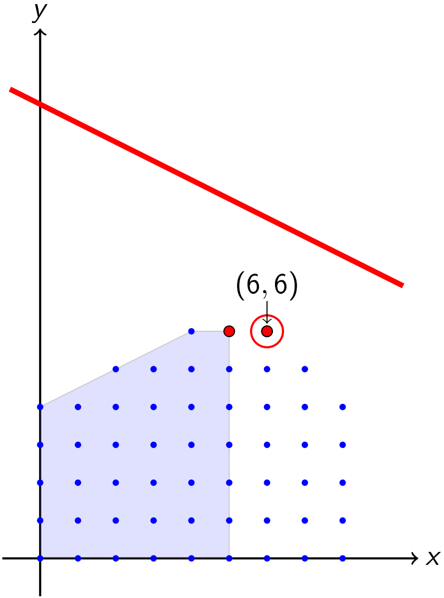
Branch-and-bound



Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

Branch-and-bound

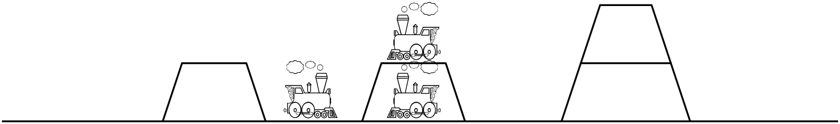


Branch-and-bound:

- dividiamo in sottoproblemi
- troviamo la soluzione di ogni sottoproblema e prendiamo la migliore

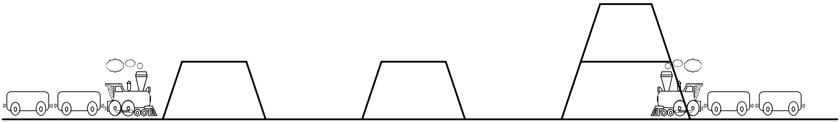
Gestione in tempo reale

Cosa sono i deadlocks



Deadlock: un insieme di treni si trova in deadlock se nessun treno può continuare il suo percorso, a meno che uno degli altri treni non venga prima tirato indietro.

Cosa sono i deadlocks



Deadlock: un insieme di treni si trova in deadlock se nessun treno può continuare il suo percorso, a meno che uno degli altri treni non venga prima tirato indietro.

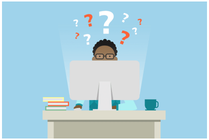
Come individuare i deadlocks

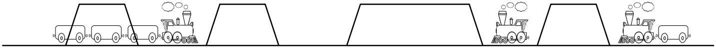
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"

Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!

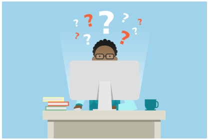




Come individuare i deadlocks

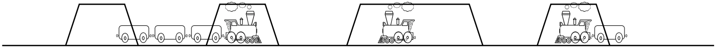
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.



"Ma c'è un deadlock?"

Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!



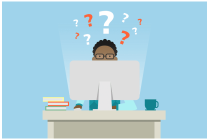
Come individuare i deadlocks

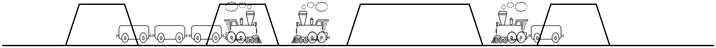
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"

Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!





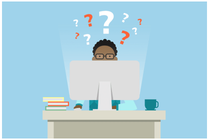
Come individuare i deadlocks

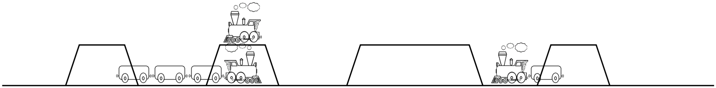
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"

Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!





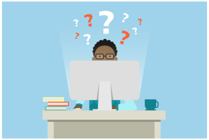
Come individuare i deadlocks

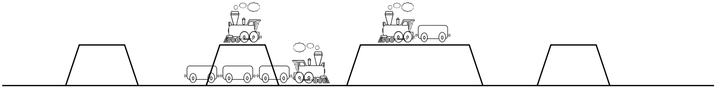
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"

Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!



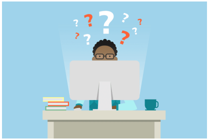


Come individuare i deadlocks

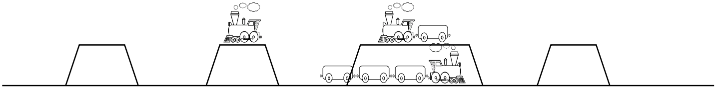
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"



Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!

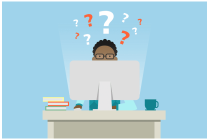


Come individuare i deadlocks

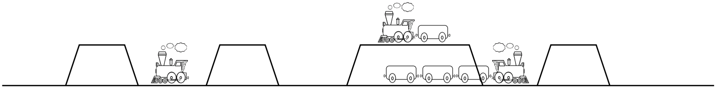
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"



Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!

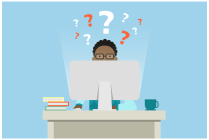


Come individuare i deadlocks

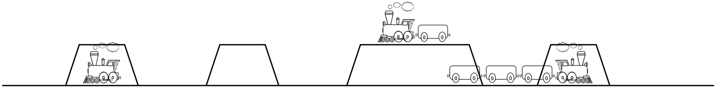
Partiamo sempre da un piano senza deadlocks.
Cosa succede?

- si verificano eventi inattesi,
- i dispatchers possono decidere di modificare i percorsi dei treni.

"Ma c'è un deadlock?"

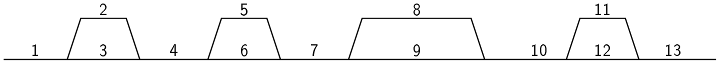


Se riesco a trovare una sequenza di mosse valide, la risposta è no!



Variabili (binarie 0/1)

- $x_{t,r,i}$: dove si trova la locomotiva del treno t all'istante i
- $y_{t,r,i}$: altri binari occupati dai vagoni del treno



Locomotiva del treno:

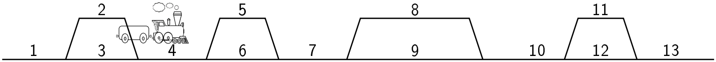
istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Vagoni del treno:

istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Variabili (binarie 0/1)

- $x_{1,4,1}$: dove si trova la locomotiva del treno 1 all'istante 1
- $y_{t,r,i}$: altri binari occupati dai vagoni del treno



Locomotiva del treno:

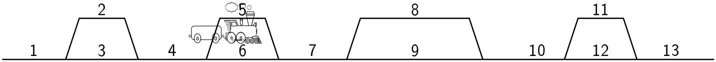
istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Vagoni del treno:

istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Variabili (binarie 0/1)

- $x_{t,r,i}$: dove si trova la locomotiva del treno t all'istante i
- $y_{t,r,i}$: altri binari occupati dai vagoni del treno



Locomotiva del treno:

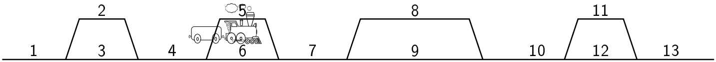
istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Vagoni del treno:

istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Variabili (binarie 0/1)

- $x_{t,r,i}$: dove si trova la locomotiva del treno t all'istante i
- $y_{t,r,i}$: altri binari occupati dai vagoni del treno



Locomotiva del treno:

istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Vagoni del treno:

istante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

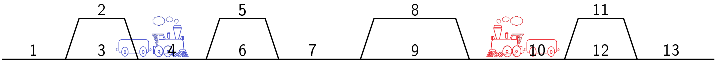
Vincoli

Posizione iniziale all'istante 0:

- $x_{1,4,0} = 1$,
- $x_{2,10,0} = 1$,
- $y_{1,3,0} = 1$

Posizione finale (8 istanti totali):

- $x_{1,13,8} + x_{1,4,8} = 1$,
- $x_{2,1,8} + x_{2,10,8} = 1$



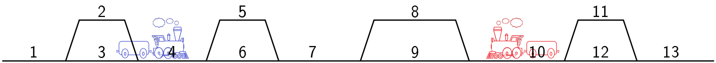
Vincoli

Al massimo un solo treno su ogni risorsa *r* e istante *i*:

- $x_{1,7,3} + x_{2,7,3} \leq 1$

Ad ogni istante *i*, la locomotiva del treno si trova in un posto solo:

- $x_{1,1,2} + x_{1,2,2} + x_{1,3,2} + x_{1,4,2} + x_{1,5,2} + x_{1,6,2} + x_{1,7,2} + x_{1,8,2} + x_{1,9,2} + x_{1,10,2} + x_{1,11,2} + x_{1,12,2} + x_{1,13,2} = 1$



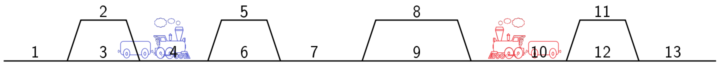
Vincoli

Al massimo un solo treno su ogni risorsa r e istante i:

- $x_{1,7,3} + y_{1,7,3} + x_{2,7,3} + y_{2,7,3} \leq 1$

Ad ogni istante i, la locomotiva del treno si trova in un posto solo:

- $x_{1,1,2} + x_{1,2,2} + x_{1,3,2} + x_{1,4,2} + x_{1,5,2} + x_{1,6,2} + x_{1,7,2} + x_{1,8,2} + x_{1,9,2} + x_{1,10,2} + x_{1,11,2} + x_{1,12,2} + x_{1,13,2} = 1$



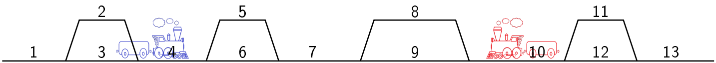
Vincoli

Al massimo un solo treno su ogni risorsa r e istante i:

- $x_{1,r,i} + y_{1,r,i} + x_{2,r,i} + y_{2,r,i} \leq 1$

Ad ogni istante i, la locomotiva del treno si trova in un posto solo:

- $x_{1,1,2} + x_{1,2,2} + x_{1,3,2} + x_{1,4,2} + x_{1,5,2} + x_{1,6,2} + x_{1,7,2} + x_{1,8,2} + x_{1,9,2} + x_{1,10,2} + x_{1,11,2} + x_{1,12,2} + x_{1,13,2} = 1$



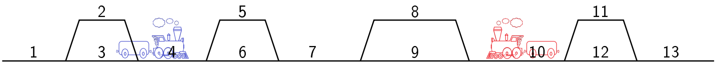
Vincoli

Al massimo un solo treno su ogni risorsa r e istante i:

- $x_{1,r,i} + y_{1,r,i} + x_{2,r,i} + y_{2,r,i} \leq 1$

Ad ogni istante i, la locomotiva del treno si trova in un posto solo:

- $\sum_{r=1}^{13} x_{t,r,i} = 1$



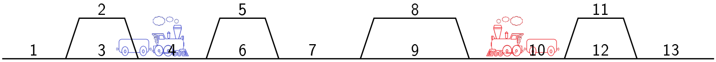
Vincoli

Avanzamento delle locomotive:

- $x_{1,4,1} \leq x_{1,4,2} + x_{1,5,2} + x_{1,6,2}$
- $x_{2,7,2} + y_{2,7,2} \leq 1 - x_{1,7,3}$

Occupazione dei binari da parte dei vagoni:

- basata sulle lunghezze dei treni
- $x_{1,5,4} \leq y_{1,4,4}$



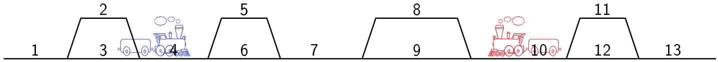
Vincoli

Avanzamento delle locomotive:

- $x_{t,r,i} \leq x_{t,r,i+1} + \sum_{s \text{seguenti}} x_{t,s,i+1}$
- $x_{2,7,2} + y_{2,7,2} \leq 1 - x_{1,7,3}$

Occupazione dei binari da parte dei vagoni:

- basata sulle lunghezze dei treni
- $x_{1,5,4} \leq y_{1,4,4}$



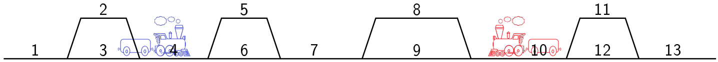
Vincoli

Avanzamento delle locomotive:

- $x_{t,r,i} \leq x_{t,r,i+1} + \sum_{s \text{seguenti}} x_{t,s,i+1}$
- $x_{2,r,i} + y_{2,r,i} \leq 1 - x_{1,r,i+1}$ e $x_{1,r,i} + y_{1,r,i} \leq 1 - x_{2,r,i+1}$

Occupazione dei binari da parte dei vagoni:

- basata sulle lunghezze dei treni
- $x_{1,5,4} \leq y_{1,4,4}$

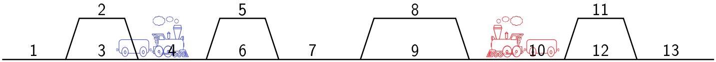


Funzione obiettivo

Scelta preferita: il treno riesce ad attraversare la rete ferroviaria.

Scelta di ripiego: il treno rimane fermo.

$$\max \quad 10x_{1,13,8} + 10x_{2,1,8} + x_{1,4,8} + x_{2,10,8}$$



$$(2 \times 13 \times 9) \times 2 = 468 \text{ variabili!}$$

Cosa dobbiamo ricordare della risoluzione grafica:

- la soluzione ottima si trova su un vertice della regione ammissibile
- un vertice è la soluzione di un sistema di equazioni lineari
- scegliendo diversi sottoinsiemi di equazioni, trovo diversi vertici

Algoritmo del simplesso

"Io studio matematica"

Oh che bello! Mi é sempre piaciuta la matematica!

Ah, io la matematica non l'ho mai capita...