

Alcuni risultati di regolarità per una classe di funzioni BV superiormente semicontinue

ANTONIO MARIGONDA, KHAI T. NGUYEN E DAVIDE VITTONI

SOMMARIO

Vengono studiate proprietà di regolarità di una particolare classe di funzioni semicontinue superiormente $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ il cui ipografico soddisfi la seguente proprietà geometrica: esistono $c > 0$, $\theta \in]0, 1]$ tali che per ogni $x \in \text{dom}(f)$, $\beta \leq f(x)$ esista $v \in N_{\text{hypo}(f)}^F(x, \beta)$ (ossia v è una normale di Frechét all'ipografico), $\|v\| = 1$ con

$$(1) \quad \langle v, (y - x, \beta - f(x)) \rangle \leq c (\|y - x\|^{1+\theta} + |\beta - f(x)|^{1+\theta}).$$

Il caso $\theta = 1$ corrisponde alla *condizione di sfera esterna*, studiata in [4]. In generale, la condizione (1) implica l'esistenza di un'ellissoide uniforme per ogni punto P nella frontiera di $\text{hypo}(f)$, la cui intersezione con l'ipografico si riduca al solo punto P .

Lo studio di questa classe di funzioni è motivata dalle proprietà di regolarità della funzione tempo minimo di alcune classi di sistemi nonlineari di controllo. La proprietà (1) generalizza i concetti di funzioni semiconcave (studiate in [1]) e di funzioni il cui epigrafico ha *positive reach* nel senso di Federer (cfr. [2, 3]).

Si prova che queste funzioni condividono numerose proprietà con le funzioni appartenenti a queste sottoclassi, in particolare sono localmente BV e differenziabili q.o. Il nostro approccio consiste nel fornire un teorema di struttura per l'insieme S dei punti di non differenziabilità, che risulta \mathcal{H}^{d-1} -rettificabile. È possibile anche fornire una classificazione più fine delle singolarità a seconda della dimensione del cono normale all'ipografico, generalizzando un risultato simile provato da Federer per gli insiemi con reach positivo. Vengono utilizzate tecniche di analisi nonsmooth e di teoria geometrica della misura.

Rimane un problema aperto, proveniente anch'esso dallo studio della funzione tempo minimo, fornire opportune condizioni sufficienti per ottenere regolarità SBV , dato che questa proprietà in generale non vale nemmeno nel caso con positive reach.

REFERENCES

- [1] Piermarco Cannarsa and Carlo Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004. MR2041617 (2005e:49001)
- [2] Giovanni Colombo and Antonio Marigonda, *Differentiability properties for a class of non-convex functions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), no. 1, 1–31, DOI 10.1007/s00526-005-0352-7. MR2183853 (2006h:49027)
- [3] Herbert Federer, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 418–491. MR0110078 (22 #961)
- [4] Khai T. Nguyen, *Hypographs satisfying an external sphere condition and the regularity of the minimum time function*, J. Math. Anal. Appl. **372** (2010), 611–628, DOI 10.1016/j.jmaa.2010.07.010.

Antonio Marigonda: Dipartimento di Informatica, Università di Verona
Strada Le Grazie 15, I-37134 Verona, Italy.
Email:antonio.marigonda@univr.it

Nguyen Tien Khai: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova,
Via Trieste 63, I-35121 Padova, Italy.
Email:khai@math.unipd.it

Davide Vittone: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova,
Via Trieste 63, I-35121 Padova, Italy.
Email:vittone@math.unipd.it

Some regularity results for a class of upper semicontinuous BV functions

ANTONIO MARIGONDA, KHAI T. NGUYEN, AND DAVIDE VITTONI

ABSTRACT

We study regularity properties enjoyed by a class of u.s.c. functions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ whose hypograph satisfies a geometric regularity properties, namely: there exist $c > 0$, $\theta \in]0, 1]$ such that for each $x \in \text{dom}(f)$, $\beta \leq f(x)$, there exists $v \in N_{\text{hypo}(f)}^F(x, \beta)$ (i.e. v is a Fréchet normal to the hypograph), $\|v\| = 1$ with

$$(A) \quad \langle v, (y - x, \beta - f(x)) \rangle \leq c (\|y - x\|^{1+\theta} + |\beta - f(x)|^{1+\theta}).$$

The case $\theta = 1$ corresponds to *external sphere condition*, which was studied in [4]. More generally, condition (A) implies the existence of a sort of (uniform) *ellipsoid*, for each point P in the boundary of $\text{hypo}(f)$, whose intersection with the hypograph of f reduces to P .

This class of functions arise in the study of regularity properties for the minimum time function of certain classes of nonlinear control systems. Indeed property (A) generalizes both the concepts of semiconcave functions (studied in [1]) and functions whose hypograph has *positive reach* in the sense of Federer (see [2, 3]).

We will prove that these functions inherit several properties with these subclasses, namely they are locally BV and differentiable a.e. Our approach consists in providing a structure theorem for the set S of nondifferentiability points, which turns out to be lower dimensional rectifiable. Moreover, it can be performed a finer classification of the singularities depending on the dimension of the normal cone to the hypograph, generalizing a similar result proved by Federer for sets with positive reach. Techniques of nonsmooth analysis and geometric measure theory are used.

It is still an open problem, arising in the study of the minimum time function, to provide suitable sufficient conditions yielding SBV regularity, since this property in general does not hold even in the positive reach case.

REFERENCES

- [1] Piermarco Cannarsa and Carlo Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004. MR2041617 (2005e:49001)
- [2] Giovanni Colombo and Antonio Marigonda, *Differentiability properties for a class of non-convex functions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), no. 1, 1–31, DOI 10.1007/s00526-005-0352-7. MR2183853 (2006h:49027)
- [3] Herbert Federer, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 418–491. MR0110078 (22 #961)
- [4] Khai T. Nguyen, *Hypographs satisfying an external sphere condition and the regularity of the minimum time function*, J. Math. Anal. Appl. **372** (2010), 611–628, DOI 10.1016/j.jmaa.2010.07.010.

Antonio Marigonda: Department of Computer Sciences, University of Verona
Strada Le Grazie 15, I-37134 Verona, Italy.
Email:antonio.marigonda@univr.it

Nguyen Tien Khai: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova,
Via Trieste 63, I-35121 Padova, Italy.
Email:khai@math.unipd.it

Davide Vittone: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova,
Via Trieste 63, I-35121 Padova, Italy.
Email:vittone@math.unipd.it