INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
Laurea Magistrale in Matematica- docente A. Cesaroni

Appello 14.03.2014. Soluzione degli esercizi.

Esercizio 1 (10 punti).

1. Enunciare e provare il principio del massimo forte e debole per le funzioni subarmoniche.
2. Mostrare che una funzione convessa $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è subarmonica.
3. Dare un esempio di funzione subarmonica non convessa.
4. Mostrare che una funzione convessa e superarmonica è una funzione lineare.

Soluzione. 2 Se u è convessa allora è continua (risultato noto) e inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per ogni $r > 0$ e per ogni y con $|y| = r$

$$u(x) \leq \frac{1}{2}u(x+y) + \frac{1}{2}u(x-y).$$

Integro entrambi i termini della diseguaglianza per $y \in \partial B(0,r)$, divido per la misura della sfera in $\partial B(0,r)$ e ottengo

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(z)dS(z).$$

Dato che la precedente diseguaglianza è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$, posso concludere che u è subarmonica in $\mathbb{R}^n$.

3 $u(x,y) = ax^2 - by^2$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $a > b > 0$.

4 Dal punto 2. se u è convessa è subarmonica. Quindi u è in particolare armonica. Dal fatto che u è convessa e soddisfa $\Delta u = 0$ ottengo che $D^2u(x)$ sia la matrice nulla per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dato che u è regolare, questo implica che u sia una funzione lineare.

Esercizio 2 (10 punti).

1. Siano $b \in \mathbb{R}^n$ e $g \in C(R^n) \cap L^\infty(R^n)$. Considerare il problema di Cauchy

$$(C) \begin{cases} u_t - \Delta u - b \cdot Du = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Scrivere esplicitamente una soluzione di (C). Discutere la regolarità e l'unicità di tale soluzione (in un'opportuna classe di funzioni).

2. Considerare il problema in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$$(C) \begin{cases} u_t - u_{xx} + 3u_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = e^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Discutere il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

Soluzione. 1. Sia u soluzione di (C), allora $v(x,t) = u(x - bt, t)$ è soluzione di

$$(C') \begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ v(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Una soluzione di (C') è data da

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - \sqrt{4t}z)e^{-|z|^2}dz.$$

Una soluzione u del problema (C) è dunque data da

$$u(x,t) = v(x+bt,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x+bt-\sqrt{4t}z)e^{-|z|^2}dz.$$

Tale soluzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$, è limitata in ogni insieme del tipo $\mathbb{R}^n \times [S,T]$ con $0 \le S < T < \infty$, è unica nella classe di funzioni $w(x,t)$ tali che per ogni $T > 0$ esistano $C > 0, \alpha > 0$ con $|w(x,t)| \le Ce^{\alpha|x|^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$.

2. In questo caso $b = -3$ e $g(x) = e^x$. Dunque la soluzione è data da

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{x-3t-2\sqrt{t}z}e^{-|z|^2}dz = \frac{e^{x-3t}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(z+\sqrt{t})^2}e^t dz = e^{x-2t}.$$

Dunque $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \lim_{t\to+\infty} e^{x-2t} = 0$ localmente uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (10 punti)**.** Considerare il problema di Cauchy

$$(H) \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = u(x,t)(1-u(x,t)) & x \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. Mostrare che esiste al più una soluzione limitata del problema.
2. Assumere che $0 \le u_0(x) \le 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Mostrare che se $u(x,t)$ è la soluzione limitata di (H) allora $0 \le u(x,t) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.
3. Sia $u_0(x) = \frac{\cos^2 x+1}{4}$. Studiare il comportamento della soluzione u di (H) per $t \to +\infty$.

Soluzione. 1. Siano u, v due soluzioni limitate del problema e sia $M \ge \|u\|_\infty, \|v\|_\infty$. Definiamo $F(s) = s(1-s)$. Per il teorema della media si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, con $u(x,t) \ne v(x,t)$ esiste $\xi(x,t) \in [u(x,t), v(x,t)] \subseteq [-M,M]$ tale che

$$\frac{F(u(x,t)) - F(v(x,t))}{u(x,t) - v(x,t)} = F'(\xi(x,t)) \le \max_{\xi \in [-M,M]} F'(\xi) = F_M.$$

Definiamo $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Allora w è una funzione limitata in ogni insieme $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ e risolve

$$\begin{cases} w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = F(u(x,t) - F(v(x,t) \le F_M w(x,t) & x \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty). \\ w(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Per il principio del confronto parabolico, posso concludere che $w(x,t) \le 0$ per ogni x, t e dunque $u(x,t) \le v(x,t)$. Lo stesso argomento si può ripetere con $v(x,t) - u(x,t)$.

2. La funzione $v \equiv 0$ è una sottosoluzione del problema (H), mentre la funzione $v \equiv 1$ è una soprasoluzione di (H). Procedendo come nel punto 1, posso mostrare che $0 \le u(x,t) \le 1$ dove u è una soluzione limitata del problema (H).

3. $F'(0) = 1$, $F'(1) = -1$: dunque 0 è un equilibrio instabile del sistema e 1 è un equilibrio stabile. Dato che per ogni x, $0 < \frac{1}{4} \le u_0(x) \le \frac{1}{2} < 1$, ho che $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 1$, uniformemente in x (con velocità esponenziale).

   Più esplicitamente considero le soluzioni delle equazioni ordinarie:

$$\begin{cases} U'(t) = U(t)(1-U(t)) & t > 0 \\ U(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} V'(t) = V(t)(1-V(t)) & t > 0 \\ V(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Un calcolo immediato dà $U(t) = \frac{e^t}{3+e^t}$ e $V(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$. U è una sottosoluzione di (H) con dato iniziale $\frac{\cos^2 x+1}{4}$, mentre V è una soprasoluzione. Dunque, di nuovo per lo stesso argomento al punto 1, si ha che

$$\frac{e^t}{3+e^t} \leq u(x,t) \leq \frac{e^t}{1+e^t} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

Dunque

$$\frac{1}{1+e^t} \leq 1 - u(x,t) \leq \frac{3}{3+e^t} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0$$

che dà il risultato richiesto.

Esercizio 4 (10 punti).

1. Considerare l'equazione alle derivate parziali

$$(E) \qquad u_{tt} + 3u_{tx} - 4u_{xx} = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

Determinare il tipo dell'operatore differenziale in (E) (ellittico, parabolico, iperbolico).

2. Determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$(C) \begin{cases} u_{tt} + 3u_{tx} - 4u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione.

1. L'equazione si può riscrivere come

$$-\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ è indefinita, dunque l'operatore è iperbolico.

2. Ripetendo lo stesso argomento utilizzato per provare la formula di D'Alembert, si ottiene che la forma generale delle soluzioni dell'equazione è $\phi(x+t) + \psi(x-4t)$, con ϕ, ψ almeno di classe C^2. Imponendo le condizioni iniziali ottengo il sistema

$$\begin{cases} \phi(x) + \psi(x) = g(x) \\ \phi'(x) - 4\psi'(x) = 0. \end{cases}$$

Derivo la prima equazione e ottengo il sistema

$$\begin{cases} \phi'(x) + \psi'(x) = g'(x) \\ \phi'(x) - 4\psi'(x) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni (ricordando che $\phi + \psi = g$)

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{4}{5}g(x) + c \\ \psi(x) = \frac{1}{5}g(x) - c. \end{cases}$$

Una soluzione di (C) è data dunque da

$$u(x,t) = \frac{1}{5}\left(4g(x+t) + g(x-4t)\right).$$