INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
Laurea Magistrale in Matematica- docente A. Cesaroni

Appello 11.07.2014. Soluzione degli esercizi.

Esercizio 1. 3 Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione armonica tale che

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|^2} = 0.$$

Mostrare allora che esistono $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ tali che $u(x) = a + b \cdot x$.

Soluzione. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che

$$|u(x)| \leq \varepsilon|x|^2 \qquad \forall |x| \geq M_\varepsilon.$$

Sia $K_\varepsilon = \max_{|x|\leq M_\varepsilon} |u(x)|$, allora

$$|u(x)| \leq \varepsilon|x|^2 + K_\varepsilon \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Per le stime di Cauchy, esiste C che dipende solo da n tale che, per ogni $i, j \in 1, \dots, n$

$$|u_{x_i,x_j}(x_0)| \leq \frac{C}{r^2} \sup_{B(x_0,r)} |u| \qquad \forall r > 0. \tag{2}$$

Da (1) e (2), otteniamo

$$|u_{x_i x_j}(x_0)| \leq \frac{C}{r^2}(2\varepsilon r^2 + 2\varepsilon|x_0|^2 + \ K_\varepsilon) \leq 2C\varepsilon + \frac{C(2|x_0| + K_\varepsilon)}{r^2} \qquad \forall r > 0.$$

Se mandiamo $r \to +\infty$, otteniamo che $|u_{x_i x_j}(x_0)| \leq C\varepsilon$ e quindi per l'arbitrarietà di ε, $D^2u(x) \equiv 0$ per ogni x. Da questo discende la tesi.

Esercizio 2. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo regolare. Considerare il problema di Cauchy

$$(H) \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x) & x \in \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 1 & x \in \Omega \\ u(x,t) = 1 & x \in \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{cases}$$

con $f \in C(\overline{\Omega})$, $f \geq 0$.

2 Mostrare che se u è la soluzione di (H) allora per ogni $x \in \overline{\Omega}$, per ogni $t \geq 0$, per ogni $h \geq 0$ si ha che

$$u(x, t + h) \geq u(x, t).$$

3 Mostrare che se v è la soluzione del problema stazionario

$$(S) \begin{cases} -\Delta v(x) = f(x) & x \in \Omega \\ v(x) = 1 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

allora per ogni $x \in \overline{\Omega}$, per ogni $t \geq 0$, si ha che

$$u(x,t) \leq v(x).$$

Soluzione. 2 Dato che $f \geq 0$, notiamo che $w(x,t) \equiv 1$ è una sottosoluzione di (H). Dunque per il principio del confronto per operatori parabolici si ha che $u(x,t) \geq 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e $t \geq 0$. Sia $h > 0$ e definiamo $u_h(x,t) := u(x,t+h)$. Allora u_h soddisfa l'equazione in (H), inoltre $u_h(x,t) = 1$ per ogni $x \in \partial\Omega$ e $u_h(x,0) = u(x,h) \geq 1$ per quanto visto sopra. Dunque u_h è una soprasoluzione del problema (H), e possiamo concludere per il principio del confronto.

3 Per il principio del confronto per operatori ellittici in aperti limitati, si ha che $v(x) \geq 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$. Dunque v è una soprasoluzione del problema (H). Si conclude per il principio del confronto per operatori parabolici.

Esercizio 3.

2 Determinare una soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

$$(W) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \log(1+x^4) & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x \geq 0. \end{cases}$$

Studiare il comportamento della soluzione per $t \to +\infty$.

Soluzione. 2 Risolviamo il problema con il metodo di riflessione. Consideriamo il problema di Cauchy in $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$ con dati iniziali le estensioni dispari dei dati iniziali in (W):

$$(C) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{|x|} \log(1+x^4) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Notiamo che i dati iniziali sono in $C^2(\mathbb{R})$. La soluzione di (C) è data dalla formula di d'Alembert

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+ct}{|x+ct|}\log(1+(x+ct)^4) + \frac{x-ct}{|x-ct|}\log(1+(x-ct)^4)\right).$$

Se restringo $\tilde{u}$ alla semiretta $x > 0$ ottengo la soluzione di (W):

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log[(1+(x+ct)^4)(1+(x-ct)^4)] & x > ct \\ \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+(x+ct)^4}{1+(x-ct)^4}\right] & x \leq ct. \end{cases}$$

Utilizzando questa formula esplicita è semplice mostrare che per ogni compatto K di $\mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in K} |u(x,t)| = 0.$$