INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI
Laurea Magistrale in Matematica- docente A. Cesaroni

Correzione del secondo parziale, del 21 gennaio.

Esercizio 1 (14 pti)**.**
Considerare il problema di Cauchy-Dirichlet nella palla $B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$(D) \begin{cases} u_t - \Delta u + x \cdot Du = \cos t + 1 & x \in B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^3, \ t > 0 \\ u(x,t) = 2 + \sin t & x \in \partial B(0,2), \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{|x|^2}{2} & x \in B(0,2). \end{cases}$$

1. Enunciare il principio del massimo debole per operatori parabolici e dedurne l'unicità della soluzione di (D).
2. Provare che, se u è la soluzione di (D), $u(x,t) \geq \frac{|x|^2}{2} + \sin t$ per ogni $t \geq 0$, $x \in B(0,2)$.
3. Provare che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $u(x,t+2k\pi) \geq u(x,t)$ per ogni $t \geq 0$, $x \in B(0,2)$.

Soluzione. 2 Osservo che la funzione $w(x,t) = \frac{|x|^2}{2} + \sin t$ è una sottosoluzione di (D). Infatti, ricordando che $|x| \leq 2$,

$$w_t - \Delta w + x \cdot Dw = \cos t - \operatorname{tr} I + x \cdot x = \cos t - 3 + |x|^2 \leq \cos t - 3 + 4 \leq \cos t + 1.$$

Inoltre se $x \in \partial B(0,2)$, $w(x,t) = 2 + \sin t$ e infine $w(x,0) = |x|^2/2$. Dunque se u è la soluzione di (D), allora per il principio del confronto debole ho che $u(x,t) \geq w(x,t)$ per ogni t e per ogni $x \in B(0,2)$.

3 Per $k \in \mathbb{N}$ definisco $w^k(x,t) = u(x,t+2k\pi) - u(x,t)$ ove u è la soluzione di (D). Allora

$$w^k_t - \Delta w^k + x \cdot Dw^k =$$

$$u_t(x,t+2k\pi) - \Delta u(x,t+2k\pi) + x \cdot Du(x,t+2k\pi) - [u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + x \cdot Du(x,t)] =$$

$$= \cos(t+2k\pi) + 1 - (\cos t + 1) = 0$$

per periodicità del coseno. Inoltre, se $x \in \partial B(0,2)$, $w^k(x,t) = u(x,t+2k\pi) - u(x,t) = 2 + \sin(t+2k\pi) - (2 + \sin t) = 0$ per periodicità del seno. Infine $w^k(x,0) = u(x,2k\pi) - u(x,0) = u(x,2k\pi) - |x|^2/2$. Dal punto 2 otteniamo che $u(x,2k\pi) \geq |x|^2/2 + \sin(2k\pi) = |x|^2/2$. Concludiamo dunque che $w^k(x,0) \geq 0$.

Dunque w^k risolve

$$\begin{cases} w^k_t - \Delta w^k + x \cdot Dw^k = 0 & x \in B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^3, \ t > 0 \\ w^k(x,t) = 0 & x \in \partial B(0,2), \ t > 0 \\ w^k(x,0) \geq 0 & x \in B(0,2). \end{cases}$$

Concludiamo per il principio del confronto debole (dato che 0 è la soluzione del precedente problema di Cauchy Dirichlet), che $w^k(x,t) \geq 0$ per ogni $x \in B(0,2)$, $t > 0$.

Esercizio 2 (16 pti).
Considerare il problema di Cauchy, con $c > 0$,

$$(W)\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \arctan |x|^2 & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}.$$

1. Scrivere esplicitamente una soluzione di (W) (utilizzando un'opportuna formula di rappresentazione)e determinare la regolarità di tale soluzione.
2. Provare l'unicità della soluzione, in una opportuna classe di funzioni.
3. Studiare il comportamento della soluzione di (W) per $t \to +\infty$.

Soluzione. 1. Per scrivere esplicitamente una soluzione del problema (W) ho due possibilità (entrambe accettabili).

La prima fa ricorso alla formula di Kirchhoff: questa formula mi permette di scrivere una soluzione di (W) come segue

$$u(x,t) = \fint_{\{y\in\mathbb{R}^3 \ | \ |x-y|=ct\}} \arctan |y|^2 + \frac{2}{1+|y|^4} y \cdot (y-x) dS(y). \tag{1}$$

Un altro metodo per scrivere esplicitamente la soluzione è il seguente. Osservo che i dati iniziali sono funzioni radiali. Per ragioni di simmetria, cerco una soluzione che sia una funzione radiale in x, cerco quindi una soluzione della forma $u(x,t) = \phi(|x|,t)$ ove $\phi(r,t) : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ deve risolvere:

$$(R)\begin{cases} \phi_{tt} - c^2(\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r) = 0 & r > 0, t > 0 \\ \phi(r,0) = \arctan r^2 & x \geq 0 \\ \phi_t(r,0) = 0 & r \geq 0 \end{cases}.$$

Definisco $\psi(r,t) = r\phi(r,t)$. Allora ψ deve risolvere il sistema

$$(S)\begin{cases} \psi_{tt} - c^2\psi_{rr} = 0 & r > 0, t > 0 \\ \psi(r,0) = r \ \arctan r^2 & x \geq 0 \\ \psi_t(r,0) = 0 & r \geq 0 \\ \psi(0,t) = 0 & t > 0. \end{cases}.$$

Osservo che i dati iniziali sono funzioni dispari e regolari di tutto $\mathbb{R}$ (quindi la loro estensione dispari coincide con le funzioni stesse). La formula di D'Alembert e il metodo di riflessione mi permettono di scrivere esplicitamente la soluzione di (S) come

$$\psi(r,t) = \frac{(r+ct)\arctan(r+ct)^2 + (r-ct)\arctan(r-ct)^2}{2}.$$

A ritroso, ottengo una formula di rappresentazione per ϕ: $\phi(r,t) = \frac{\psi(r,t)}{r}$ per $r \neq 0$. Per $r = 0$, pongo $\phi(0,t) = \psi_r(0,t)$. Dunque per u ho la seguente formula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{(|x|+ct)\arctan(|x|+ct)^2 + (|x|-ct)\arctan(|x|-ct)^2}{2|x|} & |x| \neq 0 \\ \arctan(ct)^2 + 2\frac{c^2t^2}{1+c^4t^4} & |x| = 0. \end{cases} \tag{2}$$

3 Dalla formula di rappresentazione (1), sappiamo che il dato iniziale si propaga con fronti d'onda sferici che si allargano con velocità c: in particolare non possiamo aspettarci un limite della soluzione u uniforme in x per $t \to +\infty$.

Consideriamo il caso in cui x sia contenuto in un compatto fissato K. In particolare, in questo caso, esiste $r > 0$ tale che $|x| \leq r$. Sia $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = ct\}$, allora $ct - r \leq ct - |x| \leq |y| \leq ct + |x| \leq ct + r$. Dunque se t è sufficientemente grande (in particolare deve essere $ct > r$)

$$\arctan(ct - r)^2 \leq \arctan |y|^2 \leq \arctan(ct + r)^2$$

e

$$\left| \frac{2}{1 + |y|^4} y \cdot (y - x) \right| \leq \frac{2}{1 + |y|^4} |y||y - x| = \frac{2}{1 + |y|^4} |y| ct \leq \frac{2ct(ct + r)}{1 + |ct - r|^4}.$$

Dalla formula di rappresentazione (1) otteniamo che se $x \in K$ allora

$$\arctan(ct - r)^2 - 2\frac{ct(ct + r)}{1 + (ct - r)^4} \leq u(x, t) \leq \arctan(r + ct)^2 + 2\frac{ct(r + ct)}{1 + (ct - r)^4}.$$

Quindi posso concludere che $\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = \frac{\pi}{2}$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^3$.