Introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali, L.M. in Matematica, A.A. 2013-2014.

Nozioni di base.

Esercizio 1. Sia $\alpha > 0$ e $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ la palla di centro 0 e raggio 1. Determinare per quali valori di α la funzione $|x|^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $H^1(B(0,1))$.

Esercizio 2.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto di classe $\mathcal{C}^1$ tale che
per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste $C \geq 0$ e un raggio R per cui

$$\textbf{(C)} \qquad n(x) \cdot (y - x) \leq C|y - x|^2 \qquad \forall y \in \overline{\Omega} \cap \overline{B(x,R)},$$

dove $n(x)$ è la normale esterna a Ω in x.
Mostrare che Ω soddisfa la proprietà della sfera esterna.

Esercizio 3.

i) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be $\mathcal{C}^1$ tale che $|F(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^3}$. Assumere che $\operatorname{div} F \in L^1(\mathbb{R}^3)$ e mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} F(x) dx = 0.$$

ii) Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{C}^1$. Enunciare una condizione su F che assicuri $\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} F(x) dx = 0$.

Esercizio 4. Sia $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Determinare la formula di rappresentazione delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) + b \cdot Du(x,t) + cu(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$