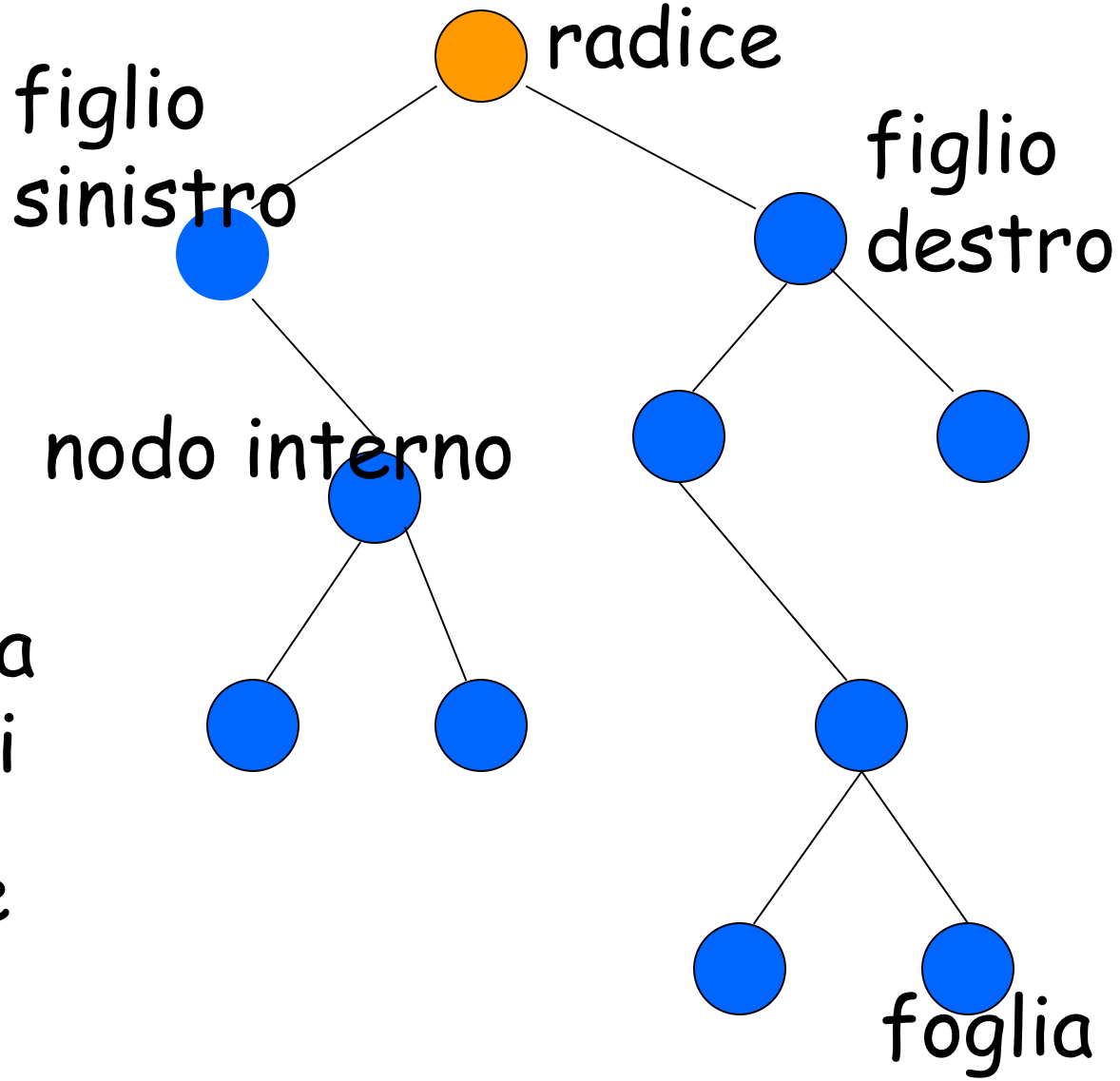
alberi binari e ricorsione

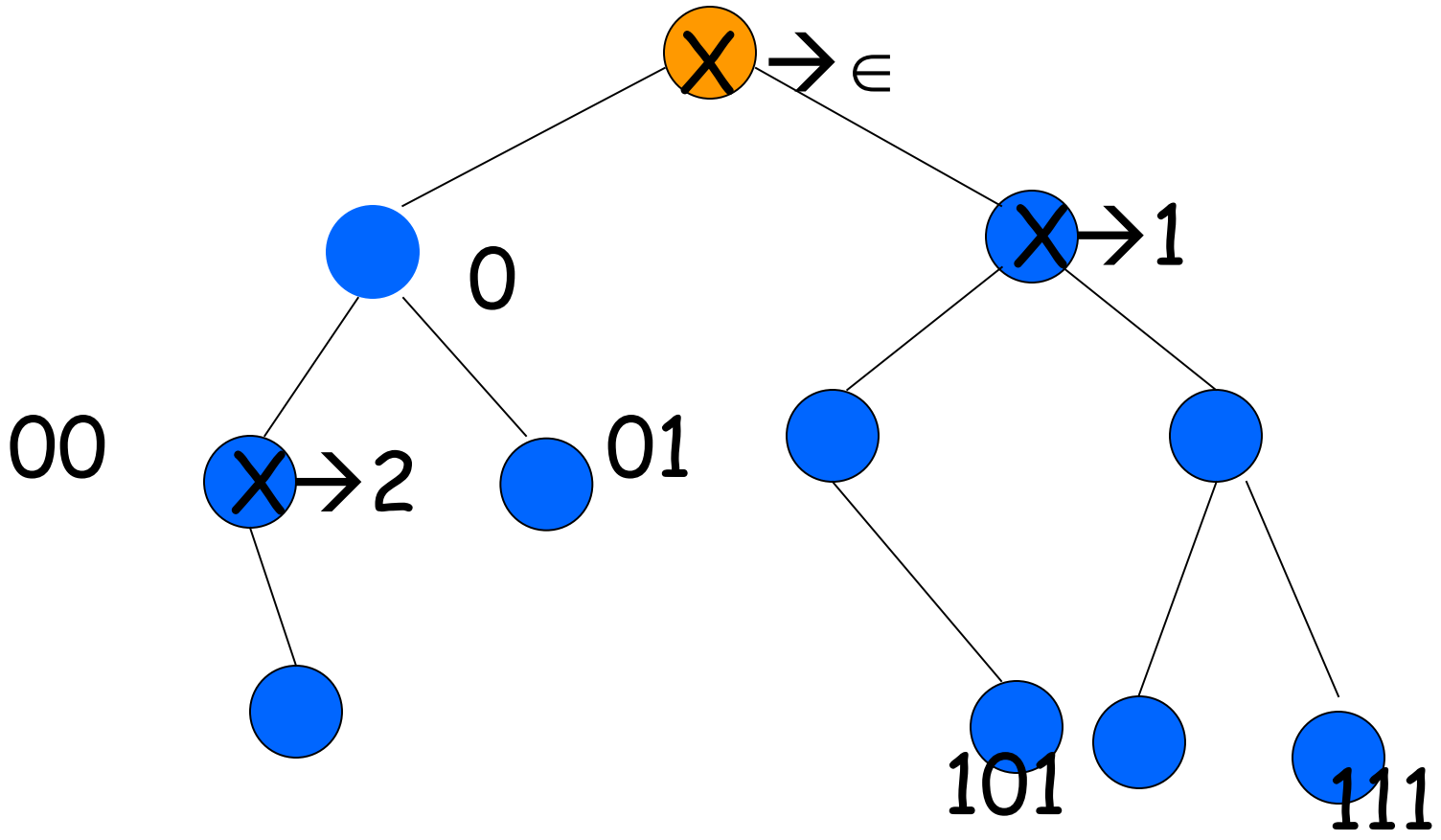
un albero binario:



ogni nodo ha al più 2 figli

ogni figlio è destro o sinistro

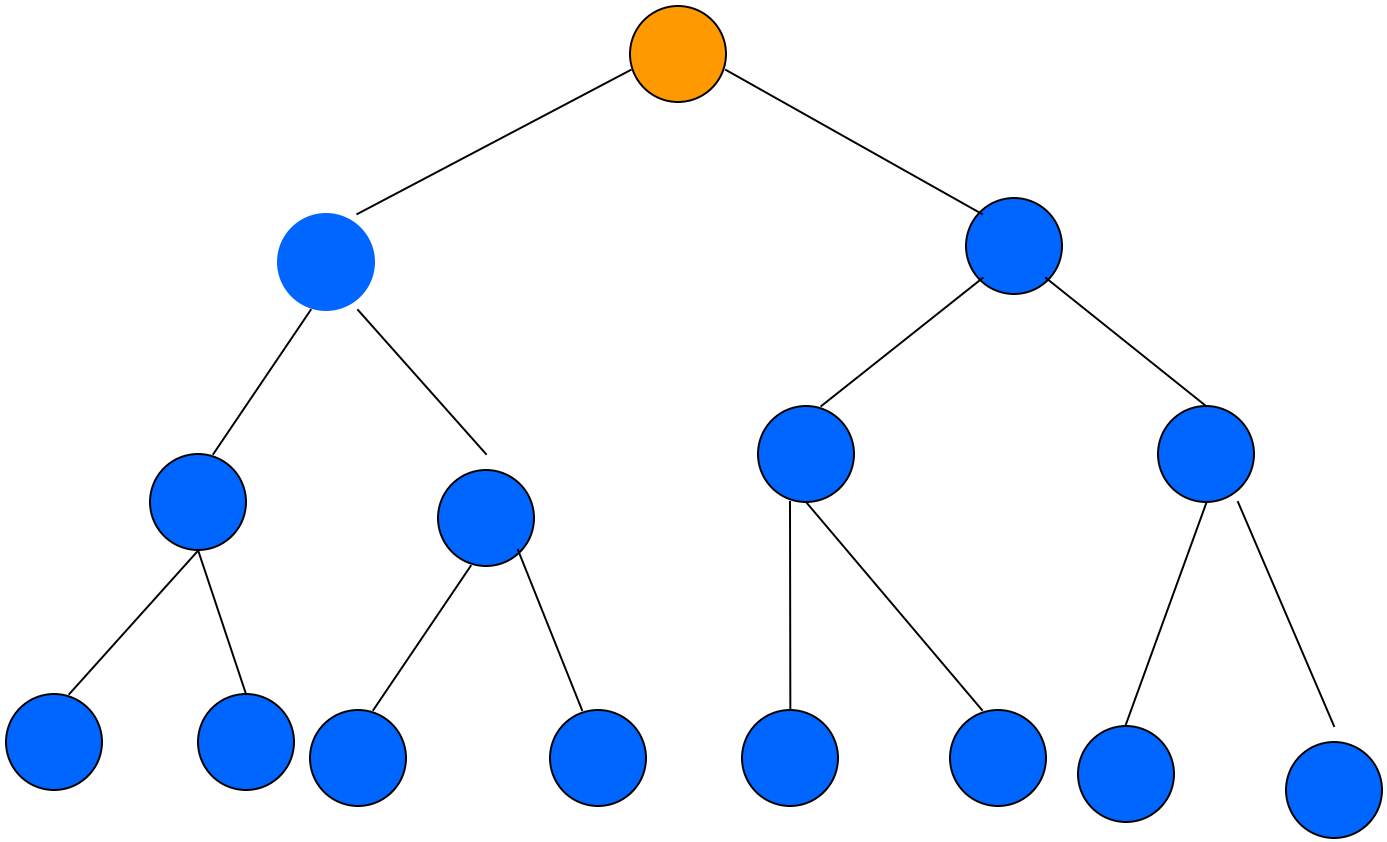
cammini = sequenze di nodi = sequenze di 0 e 1



profondità di un nodo

altezza dell'albero=prof. max delle foglie

albero binario completo



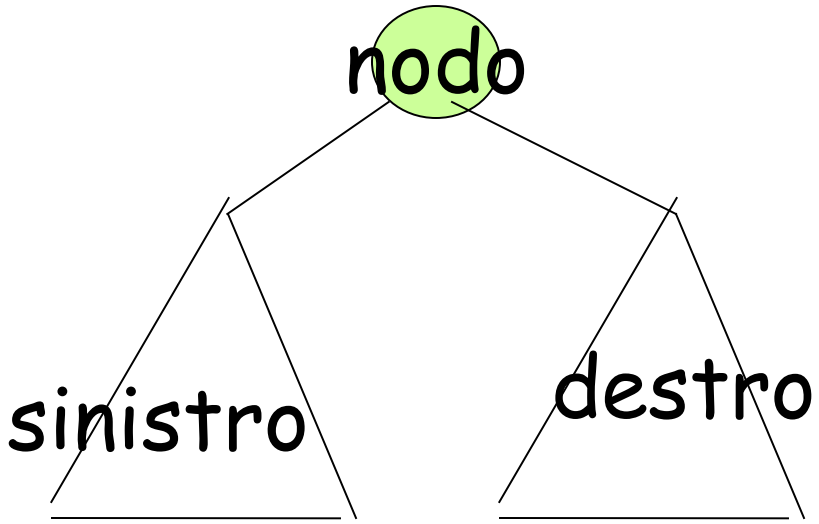
ogni livello è completo, se h= altezza

l'albero contiene $2^{h+1} - 1$ nodi

definizione ricorsiva degli alberi:

albero binario è:

- un albero vuoto
- nodo(albero sinistro, albero destro)



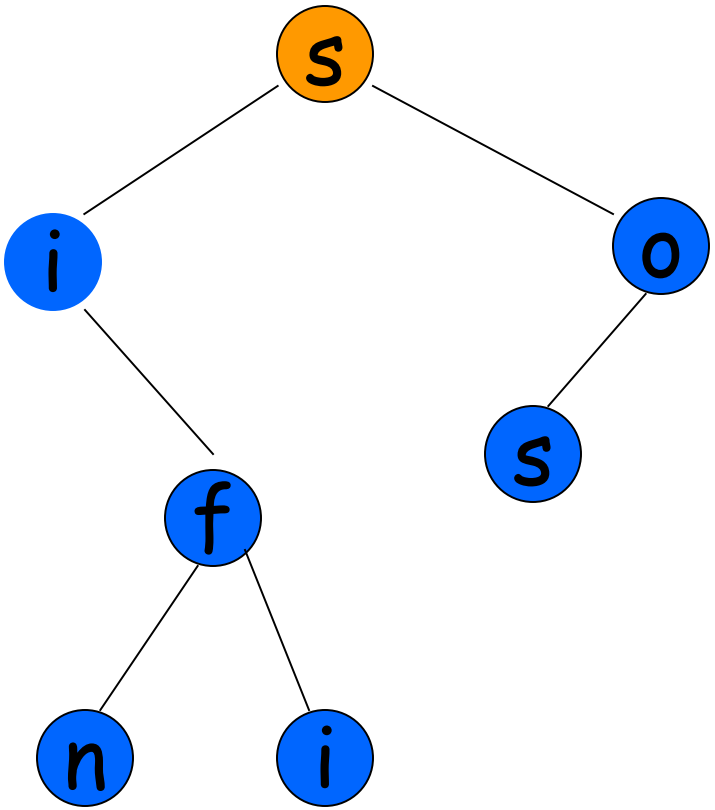
attraversamenti degli alberi = modi di visitare tutti i loro nodi

in profondità = depth-first

ma anche in larghezza = breath-first

percorso infisso:

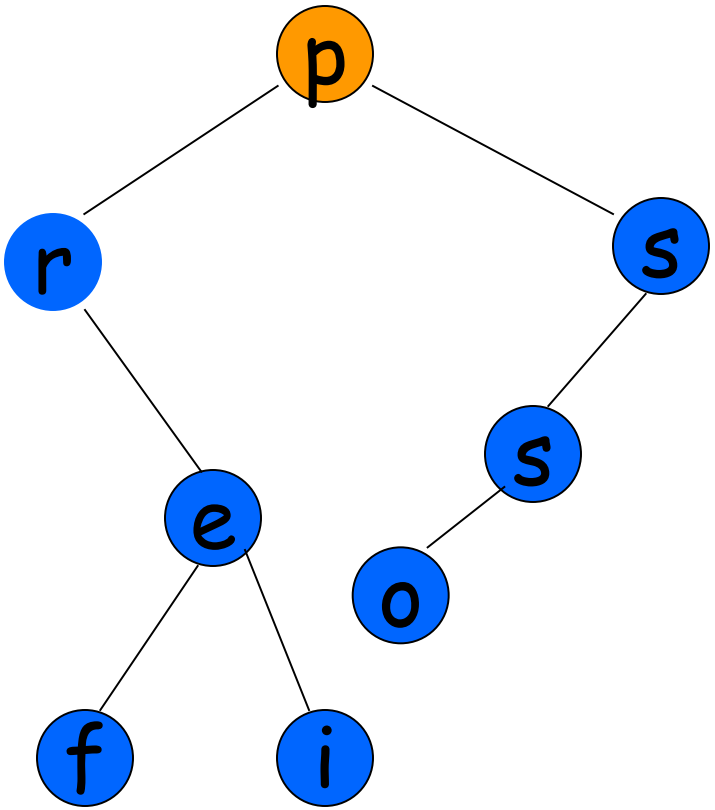
1. a sinistra
2. nodo
3. a destra



in profondità da sinistra a destra

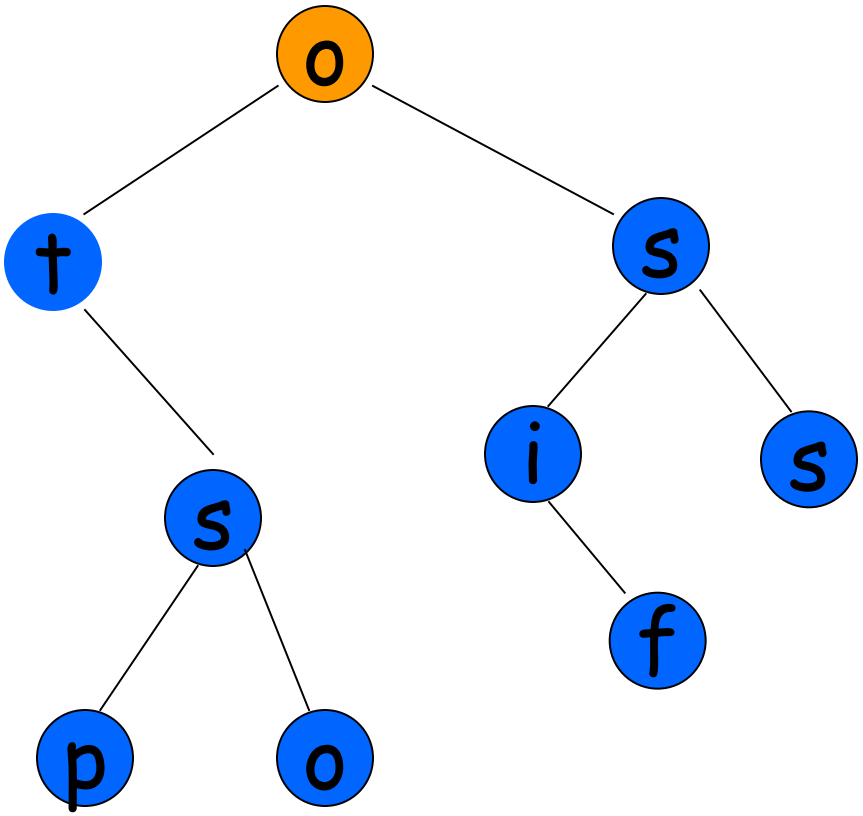
percorso prefisso:

1. nodo
2. a sinistra
3. a destra

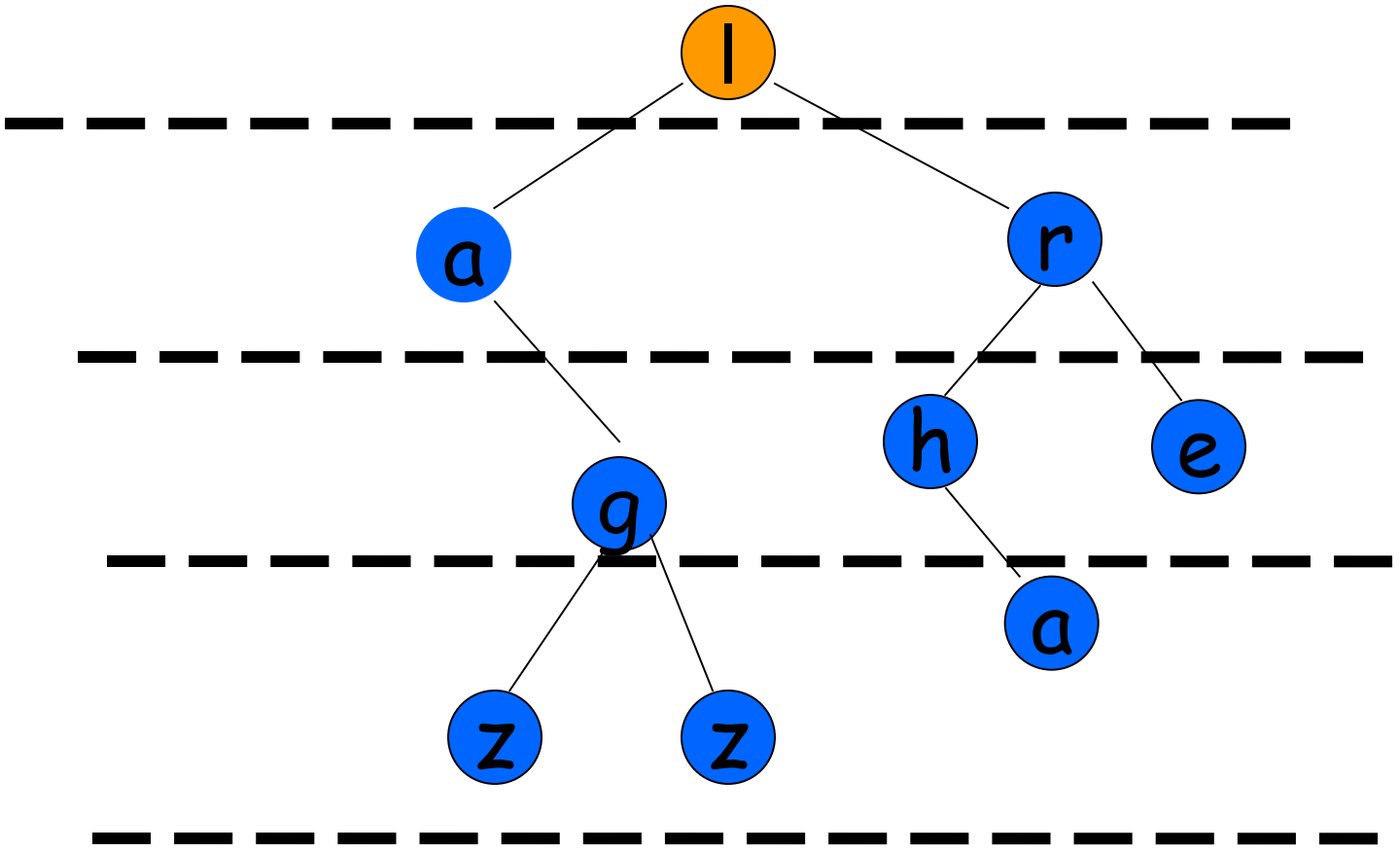


percorso postfisso:

1. a sinistra
2. a destra
3. nodo

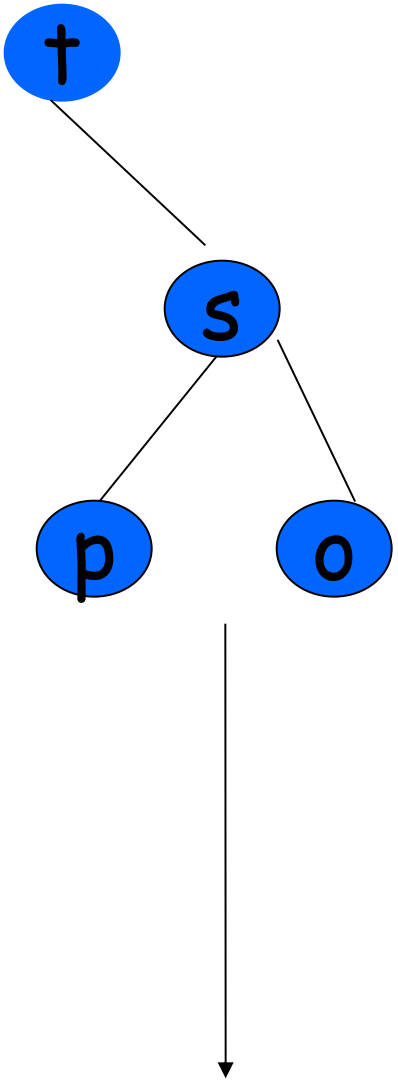


in larghezza



come realizzare un nodo di un albero binario in Python:

```
class Albero:

   def __init__(self,val=None,sx=None,dx=None):


      self.val = val

      self.sx = sx

      self.dx = dx
```



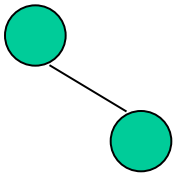
costruiamo questo albero:

```
P = Albero('p')

O = Albero('o')

S = Albero('s',P,O)

T = Albero('t',None,S)
```

t(_,s(p(_,_),o(_,_))) rappresentazione lineare

altezza di un albero = profondità massima dei suoi nodi = distanza massima tra nodi e "antenati" nell'albero

altezza 0

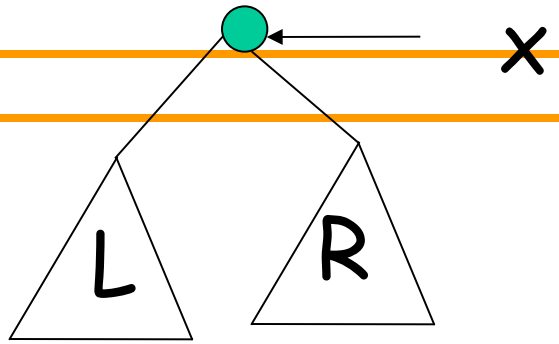


altezza 1

albero vuoto? per convenzione -1

calcolo ricorsivo dell'altezza:

```
def altezza(albero):

    if not albero:

        return -1

    return max(altezza(albero.sx),altezza(albero.dx))+1;
```



Procedura corretta perché:

1) albero vuoto ok!

2) se non vuoto, assumiamo ok per alberi L e R e lo dimostriamo induttivamente

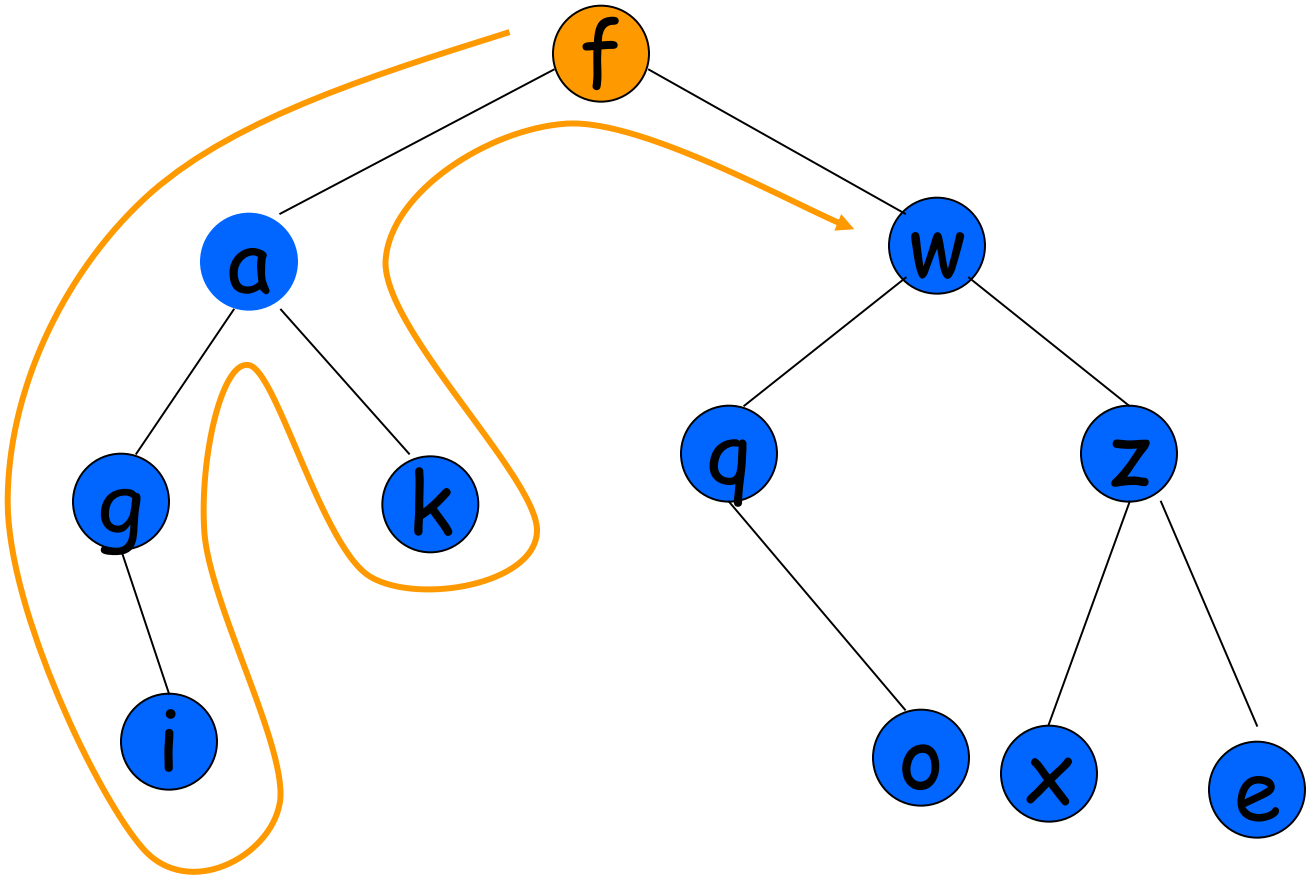
Operazioni su alberi binari

1) Visualizzazione di un albero binario

2) Creazione albero binario random

Ricerca su alberi binari

1) Dato un cammino C, restituire l'albero radicato nel nodo corrispondente
2) Ricerca lineare con visite
3) Alberi binari di ricerca (BST)

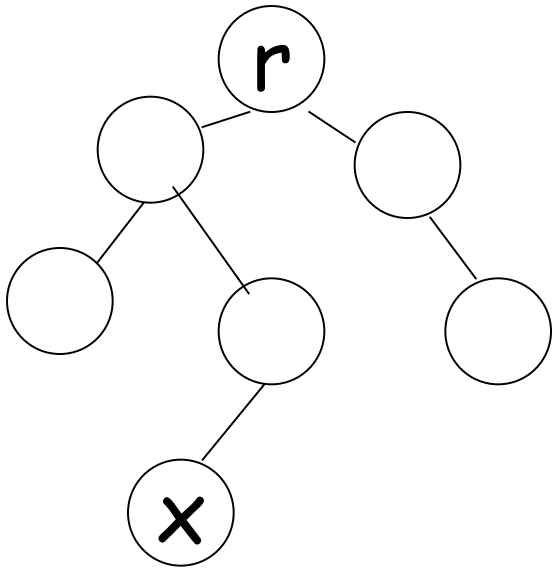


cerchiamo 'w'

f -> fa -> fag -> fagi -> fag -> fa ->fak -> fa -> f -> fw

un cammino di un albero = sequenza di 0 e 1

0=sinistra 1= destra



cammino per x:

C=[0,1,0] lung=3

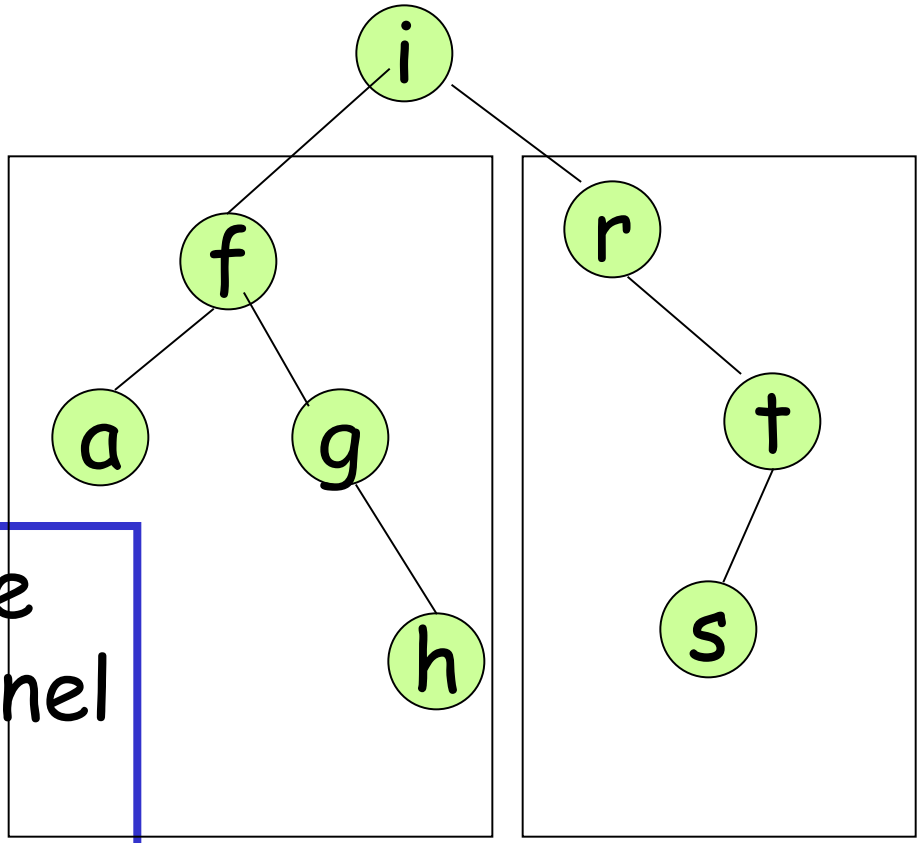
cammino di r C=[] rlung =0

Data una lista C che contiene un cammino, restituire il nodo corrispondente

```
def trova_cammino(albero, C):
    if not C:
        return albero
    if not albero:
        return None
    if C[0]==0:
        return trova_cammino(albero.sx, C[1:])
    else:
        return trova_cammino(albero.dx, C[1:])
```

binary search trees (BST):

Detti anche
alberi ordinati



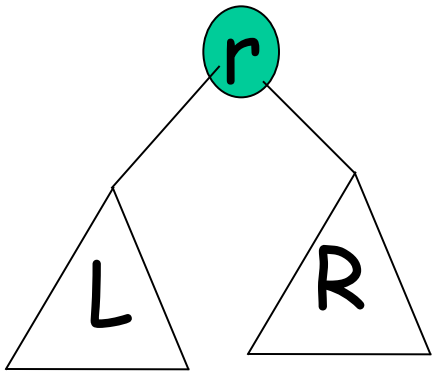
ogni nodo ha valore maggiore dei nodi nel suo sottoalbero sinistro e minore di quelli del suo sottoalbero destro

in un BST è facile (efficiente) trovare un nodo con un certo campo valore y

e restituire quel nodo se lo troviamo

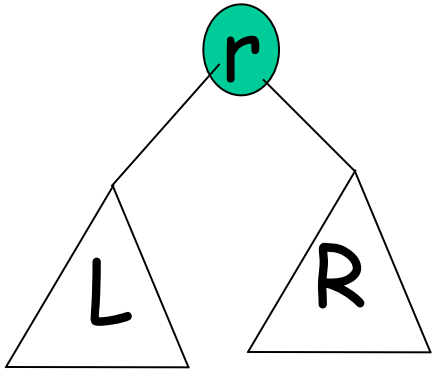
e None altrimenti

in generale:



controllo r, cerco in L e se no in R o viceversa
insomma se non c'è devo visitare tutti i nodi !!

in un BST la cosa è + semplice:



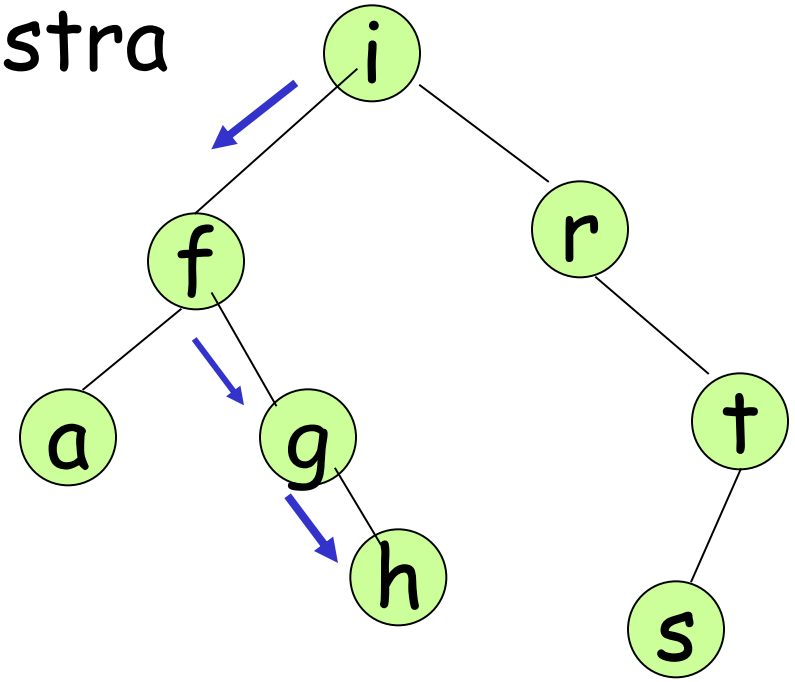
1. r.val == y restituisco r, altrimenti:
2. se r.val > y ➔ cerco solo in L
   altrimenti cerco solo in R

cerchiamo h:

h<i andiamo a sinistra

h>f destra

h>g destra



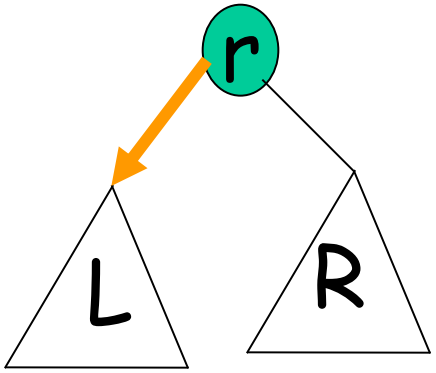
trovato !!!

ricerca in un BST:

```
def bst_search(albero, v):
    if not albero:
        return None
    if albero.val==v:
        return albero
    if albero.val>v:
        return bst_search(albero.sx,v)
    return bst_search(albero.dx,v)
```

quante chiamate ricorsive si fanno al massimo?

seguo un solo cammino : al massimo farò tante invocazioni quant'è l'altezza dell'albero

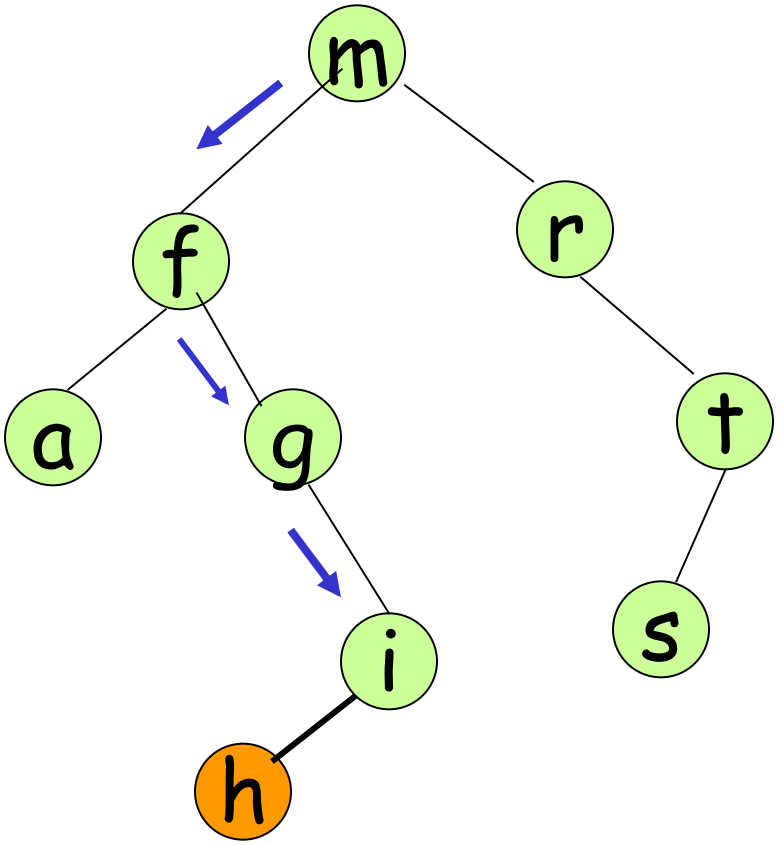


se l'albero è equilibrato, altezza = log n

dove n è il numero dei nodi dell'albero

una bella differenza tra n e log n !!!

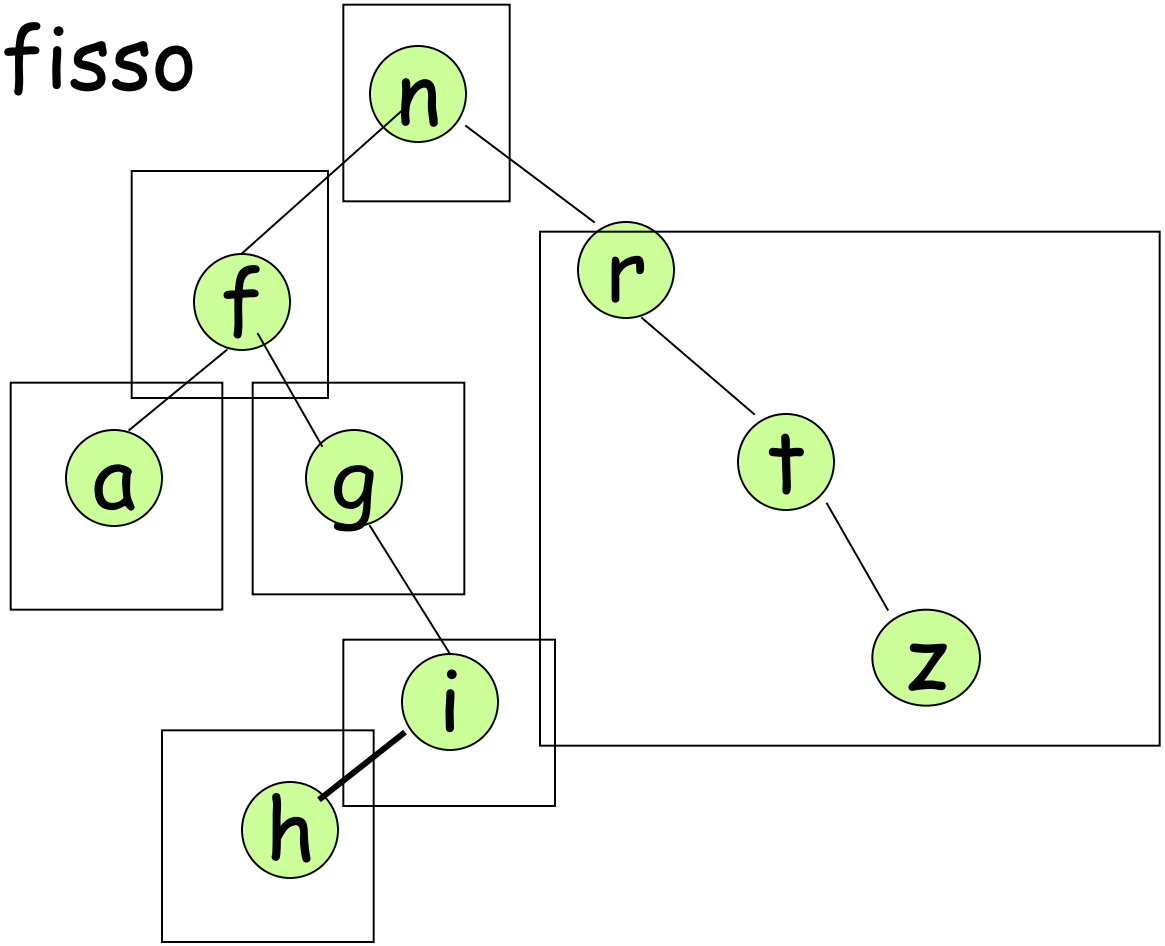
Inserimento in un BST: se h non ci fosse dove andrebbe inserito?



inserimento in un BST:

```
def bst_ins(albero,v):
    if not albero:
        return Albero(v)
    if albero.val>v:
        albero.sx = bst_ins(albero.sx,v)
    if albero.val<v:
        albero.dx = bst_ins(albero.dx,v)
    return albero
```

percorso infisso



a f g h i n r t z

sono in ordine !!

Verifica di un BST:

```
def is_bst(albero):
    def lista_ordinata(lista):
        if len(lista)<=1:
            return True
        for i in range(len(lista)-1):
            if lista[i]>lista[i+1]:
                return False
        return True
    v = visita_in(albero)
    return lista_ordinata(v)
```

esercizi sugli alberi binari

1. calcolare num occorrenze di y
2. contare i nodi con esattamente 1 figlio
2. restituire una foglia
3. restituire un nodo di profondità k
4. stampare in ordine infisso i primi k nodi
5. restituire foglia a prof. minima

contare i nodi con esattamente un figlio

```
def cn_un_figlio(albero):
    def unf(albero):
        return albero.sx and not albero.dx or \
       albero.dx and not albero.sx
    if not albero:
        return 0
    cn = cn_un_figlio(albero.sx)+cn_un_figlio(albero.dx)
    return 1+cn if unf(albero) else cn
```

1. come riconoscere un nodo di profondità k ?

parto dalla radice con k e lo diminuisco ad ogni livello finchè non diventa 0

quale cammino seguo?

è arbitario purchè si sia in grado di percorrerli tutti

non appena troviamo un nodo a profondità k, interrompiamo la ricorsione e ritorniamo

```
def at_prof(albero, k):
    if not albero:
        return None
    if k==0:
        return albero
    p = at_prof(albero.sx, k-1):
    return p if p else at_prof(albero.dx, k-1)
```