Reti Neurali (Parte II)

Corso di AA, anno 2017/18, Padova

Fabio Aiolli

06 Novembre 2017

La regola Delta

- L'algoritmo Perceptron trova un vettore dei pesi (iperpiano) capace di separare i dati solo se questi dati sono linearmente separabili
- La regola Delta è una regola di aggiornamento dei pesi diversa da quella del Perceptron che ci permette di ottenere una soluzione che approssima al meglio il concetto target
- In particolare, essa usa la discesa di gradiente per esplorare lo spazio delle ipotesi e selezionare l'ipotesi che approssima meglio il concetto target (minimizzando una funzione di errore di apprendimento, opportunamente definita)

La regola Delta

Consideriamo un Perceptron SENZA la hard-threshold (attivazione lineare):

$$o(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

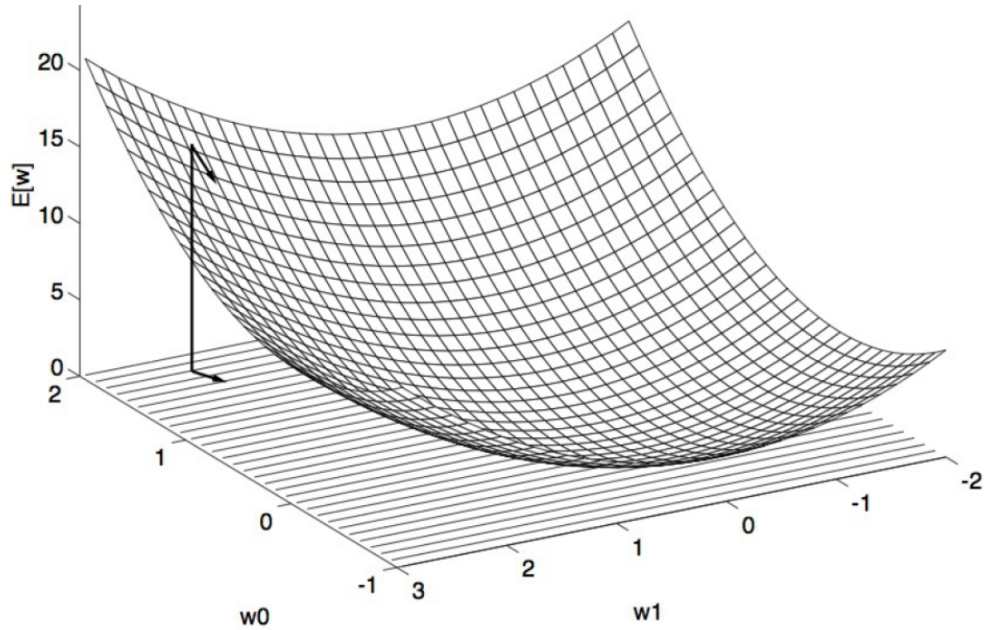
e definiamo una misura dell'errore commesso (scarto quadratico medio) da un particolare vettore dei pesi $\mathbf{w}$ come:

$$E[\mathbf{w}] = \frac{1}{2N} \sum_{(\mathbf{x}^{(s)}, t^{(s)}) \in S} (t^{(s)} - o(\mathbf{x}^{(s)}))^2$$

dove N è la cardinalità dell'insieme di apprendimento S

$\forall (\mathbf{x}^{(s)}, t^{(s)}) \in S, o(\mathbf{x}^{(s)}) = t^{(s)} \Rightarrow E[\mathbf{w}] = 0$ quindi... bisogna MINIMIZZARE $E[\mathbf{w}]$ rispetto a $\mathbf{w}$!

Minimizzazione con discesa di gradiente



Idea base: partire da un $\mathbf{w}$ random e modificarlo nella direzione contraria al gradiente (che indica la direzione di crescita di $E[\mathbf{w}]$).

$$\nabla E[\mathbf{w}] \equiv [\frac{\partial E}{\partial w_0}, \frac{\partial E}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial E}{\partial w_n}], \quad \Delta \mathbf{w} = -\eta \nabla E[\mathbf{w}], \quad \Delta w_i = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_i}.$$

Calcolo del gradiente (caso attivazione lineare)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left[\frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})^2\right] \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial}{\partial w_i}\left[(t^{(s)} - o^{(s)})^2\right] \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}2(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[t^{(s)} - o^{(s)}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[t^{(s)} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}^{(s)}\right]
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente (caso attivazione lineare)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[t^{(s)} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}^{(s)}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\left(-\frac{\partial}{\partial w_i}\left[\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}^{(s)}\right]\right) \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[\sum_{j=1}^{n} w_j x_j^{(s)}\right] \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})x_i^{(s)}
\end{aligned}
$$

Algoritmo con discesa di gradiente

Gradient-Descent(S,η):
Ogni esempio di apprendimento è una coppia $(\mathbf{x}, t)$ dove $\mathbf{x}$ è il vettore di valori in input e t è il valore desiderato in output (target). η è il coefficiente di apprendimento (che ingloba il termine costante $1/N$)

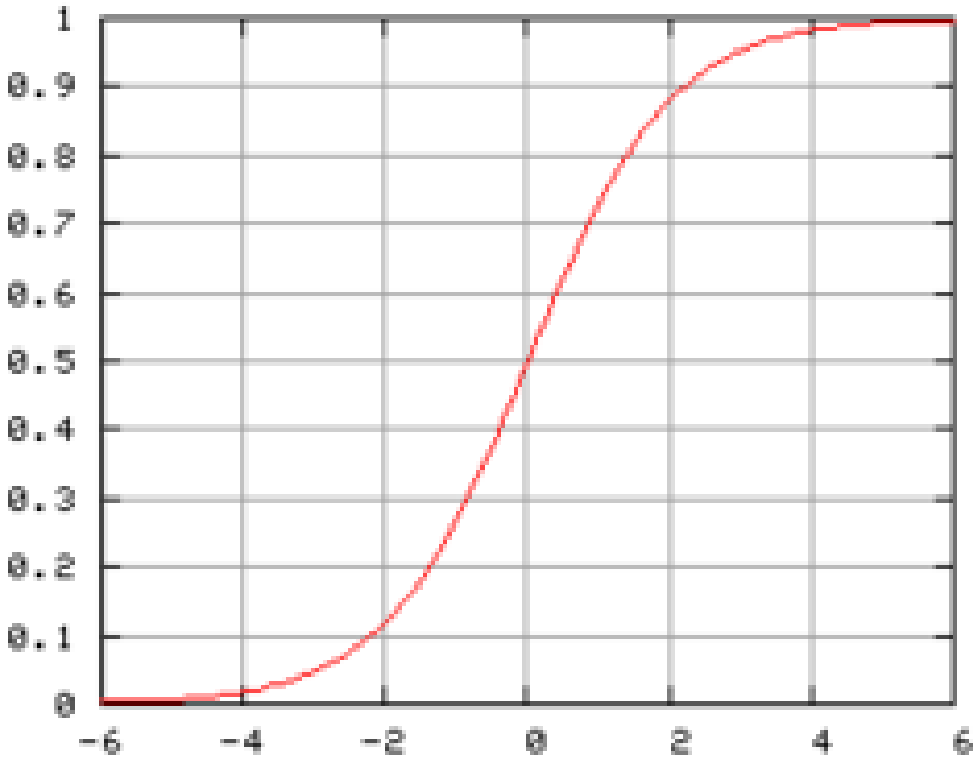
1. Assegna a w_i valori piccoli random
2. Finché la condizione di terminazione non è verificata:
   (a) $\Delta w_i \leftarrow 0$
   (b) Per ogni $(\mathbf{x}, t) \in S$:
      (i) Presenta $\mathbf{x}$ al neurone e calcola l'output $o(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$
      (ii) Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\Delta w_i \leftarrow \Delta w_i + \eta(t - o)\mathbf{x}_i$$

   (c) Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$$

Attivazione con sigmoide



Attivazione con sigmoide

Consideriamo ora un Perceptron con funzione di attivazione sigmoidale:

$$o(\mathbf{x}) = \sigma(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i) = \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) = \sigma(y)$$

dove $y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ and $\sigma(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$.

Seguiamo lo stesso approccio di prima, ovvero vogliamo trovare il vettore dei pesi che minimizza lo scarto quadratico medio sul training set utilizzando un algoritmo basato su discesa di gradiente.

A questo scopo si nota intanto che per la funzione $\sigma()$ definita sopra vale la seguente relazione (verificare per esercizio):

$$\frac{\partial \sigma(y)}{\partial y} = \sigma(y)(1 - \sigma(y))$$

Calcolo del gradiente (attivazione sigmoidale)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left[\frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})^2\right] \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial}{\partial w_i}\left[(t^{(s)} - o^{(s)})^2\right] \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{s=1}^{N}2(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[t^{(s)} - o^{(s)}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[t^{(s)} - \sigma(\mathbf{y}^{(s)})\right] \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[\sigma(\mathbf{y}^{(s)})\right]
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente (attivazione sigmoidale)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial}{\partial w_i}\left[\sigma(\mathbf{y}^{(s)})\right] \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial \sigma(y^{(s)})}{\partial y^{(s)}}\frac{\partial y^{(s)}}{\partial w_i} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\frac{\partial \sigma(y^{(s)})}{\partial y^{(s)}}\frac{\partial}{\partial w_i}\left[\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}^{(s)}\right] \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(t^{(s)} - o^{(s)})\sigma(y^{(s)})(1-\sigma(y^{(s)}))x_i^{(s)}
\end{aligned}
$$

Quindi il punto 2.b.ii dell'algoritmo dato sopra ora diventa:

$$\Delta w_i \leftarrow \Delta w_i + \eta(t-o)\sigma(y)(1-\sigma(y))x_i$$