# Apprendimento Automatico

## Metodi Bayesiani - Naive Bayes


Fabio Aiolli

13 Dicembre 2017

# Classificatore Naive Bayes

Una delle tecniche più semplici e popolari

Quando usarlo:

- insiemi di dati di dimensione abbastanza grande
- attributi che descrivono le istanze sono condizionalmemente indipendenti data la classificazione

Applicazione su cui ha avuto successo:

- Diagnosi
- Classificazione di documenti testuali

# Classificatore Naive Bayes

Funzione target $f : X \to V$, con istanze $x$ descritte da attributi $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Il valore più probabile di $f(x)$ è:

$$\begin{aligned} v_{MAP} &= \arg\max_{v_j \in V} P(v_j | a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \arg\max_{v_j \in V} \frac{P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) P(v_j)}{P(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \\ &= \arg\max_{v_j \in V} P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) P(v_j) \end{aligned}$$

Assunzione Naive Bayes:

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) = \prod_i P(a_i | v_j)$$

# Classificatore Naive Bayes

Mettendo tutto assieme:

$$v_{MAP} = \arg\max_{v_j \in V} P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) P(v_j)$$

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) = \prod_i P(a_i | v_j)$$

Classificatore Naive Bayes:

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_i P(a_i | v_j)$$

# Algoritmo Naive Bayes

Naive_Bayes_Learn(esempi)

- **For each** valore target $v_j$
  - $\hat{P}(v_j) \leftarrow$ stima di $P(v_j)$ su esempi
  - **For each** valore di attributo $a_i$ di ogni attributo $a$,
    $\hat{P}(a_i|v_j) \leftarrow$ stima di $P(a_i|v_j)$ su esempi
- **return** $\hat{P}(v_j), \hat{P}(a_i|v_j)\ \forall i, j$

Classify_New_Instance(x)

- $v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} \hat{P}(v_j) \prod_i \hat{P}(a_i|v_j)$
- **return** $v_{NB}$

# Ri-giochiamo a tennis?

È una giornata adatta per una partita di tennis?

| Day | Outlook | Temperature | Humidity | Wind | PlayTennis |
|---|---|---|---|---|---|
| D1 | Sunny | Hot | High | Weak | No |
| D2 | Sunny | Hot | High | Strong | No |
| D3 | Overcast | Hot | High | Weak | Yes |
| D4 | Rain | Mild | High | Weak | Yes |
| D5 | Rain | Cool | Normal | Weak | Yes |
| D6 | Rain | Cool | Normal | Strong | No |
| D7 | Overcast | Cool | Normal | Strong | Yes |
| D8 | Sunny | Mild | High | Weak | No |
| D9 | Sunny | Cool | Normal | Weak | Yes |
| D10 | Rain | Mild | Normal | Weak | Yes |
| D11 | Sunny | Mild | Normal | Strong | Yes |
| D12 | Overcast | Mild | High | Strong | Yes |
| D13 | Overcast | Hot | Normal | Weak | Yes |
| D14 | Rain | Mild | High | Strong | No |

# Ri-giochiamo a tennis?

Consideriamo di nuovo il problema `Giocare a Tennis` già incontrato in precedenza

Consideriamo una nuova istanza:
`<O = sunny, T = cool, H = high, W = strong>`

Vogliamo calcolare:

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_i P(a_i|v_j)$$

$$\begin{aligned} P(yes)P(sunny|y)P(cool|yes)P(high|yes)P(strong|yes) &= 0.005 \\ P(no)P(sunny|no)P(cool|no)P(high|no)P(strong|no) &= 0.021 \\ &\rightarrow v_{NB} = no \end{aligned}$$

# Naive Bayes: considerazioni aggiuntive

L'assunzione di indipendenza condizionale è spesso violata

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n | v_j) = \prod_i P(a_i | v_j)$$

- ... ma sembra funzionare comunque. Perché? Notare che non è necessario stimare correttamente la probabilità a posteriori $\hat{P}(v_j|x)$; è sufficiente che:

$$\arg\max_{v_j \in V} \hat{P}(v_j) \prod_i \hat{P}(a_i|v_j) = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_i P(a_i|v_j)$$

- la probabilità a posteriori calcolata da Naive Bayes è spesso vicina a 1 o 0 anche se non dovrebbe

# Naive Bayes: considerazioni aggiuntive

Cosa succede se nessun esempio di apprendimento con valore target $v_j$ possiede attributo $a_k$? In tal caso:

$$\hat{P}(a_k|v_j) = 0, \text{ e... } \hat{P}(v_j)\prod_i \hat{P}(a_i|v_j) = 0$$

Una soluzione tipica è la *m-stima* Bayesiana per $\hat{P}(a_i|v_j)$:

$$\hat{P}(a_i|v_j) \leftarrow \frac{n_c + mp}{n + m}$$

dove

- $n$ è il numero di esempi di apprendimento per cui $v = v_j$
- $n_c$ è il numero di esempi di apprendimento per cui $v = v_j$ e $a = a_i$
- $p$ è la stima a priori per $\hat{P}(a_i|v_j)$, di solito $1/|a_i|$
- $m$ è il peso dato a priori (cioè il numero di esempi "virtuali")

# Esempio di applicazione: Classificazione di documenti testuali

- apprendere quali documenti sono di interesse
- apprendere a classificare pagine web per argomento
- spam / no spam
- ...

Il classificatore Naive Bayes costituisce una delle tecniche più utilizzate in questi contesti

Quali attributi usare per rappresentare documenti testuali?

# Esempio di applicazione: Classificazione di documenti testuali

Concetto target: $\textit{Interessante?} : \textit{Documento} \rightarrow \{\oplus, \ominus\}$

- Rappresentare ogni documento tramite un vettore di parole. Un attributo per ogni posizione di parola nel documento
- Apprendimento: usare gli esempi per stimare: $P(\oplus), P(\ominus), P(doc|\oplus), P(doc|\ominus)$

Assunzione di indipendenza condizionale di Naive Bayes:

$$P(doc|v_j) = \prod_{i}^{lunghezza(doc)} P(a_i = w_k|v_j)$$

dove $P(a_i = w_k)$ è la prob che la parola in posizione $i$ sia $w_k$, dato $v_j$.
Una assunzione addizionale: $P(a_i = w_k|v_j) = P(a_m = w_k|v_j), \forall i, m$

# Esempio di applicazione: Classificazione di documenti testuali

Occorre quindi stimare "solo" le $P(v_j)\ \forall j$ e le $P(w_k|v_j)\ \forall k, j$

Possiamo utilizzare una $m$-stima con priori uniforme e $m$ uguale alla dimensione del vocabolario.

$$\hat{P}(w_k|v_j) = \frac{n_k + 1}{n + |vocabolario|}$$

dove

- $n$ è il numero totale di posizioni di parole in tutti i documenti di training aventi di classe $v_j$
- $n_k$ è il numero di volte che la parola $w_k$ si trova in queste posizioni
- $|Vocabolario|$ è il numero totale di parole distinte trovate nel training set

# Esempio di applicazione: Classificazione di documenti testuali

LEARN_NAIVE_BAYES_TEXT($Examples$, $V$)

*Examples is a set of text documents along with their target values. $V$ is the set of all possible target values. This function learns the probability terms $P(w_k|v_j)$, describing the probability that a randomly drawn word from a document in class $v_j$ will be the English word $w_k$. It also learns the class prior probabilities $P(v_j)$.*

1. *collect all words, punctuation, and other tokens that occur in Examples*
   - $Vocabulary \leftarrow$ the set of all distinct words and other tokens occurring in any text document from $Examples$
2. *calculate the required $P(v_j)$ and $P(w_k|v_j)$ probability terms*
   - For each target value $v_j$ in $V$ do
     - $docs_j \leftarrow$ the subset of documents from $Examples$ for which the target value is $v_j$
     - $P(v_j) \leftarrow \frac{|docs_j|}{|Examples|}$
     - $Text_j \leftarrow$ a single document created by concatenating all members of $docs_j$
     - $n \leftarrow$ total number of distinct word positions in $Text_j$
     - for each word $w_k$ in $Vocabulary$
       - $n_k \leftarrow$ number of times word $w_k$ occurs in $Text_j$
       - $P(w_k|v_j) \leftarrow \frac{n_k+1}{n+|Vocabulary|}$

CLASSIFY_NAIVE_BAYES_TEXT($Doc$)

*Return the estimated target value for the document Doc. $a_i$ denotes the word found in the ith position within Doc.*

- $positions \leftarrow$ all word positions in $Doc$ that contain tokens found in $Vocabulary$
- Return $v_{NB}$, where

$$v_{NB} = \underset{v_j \in V}{\text{argmax}}\, P(v_j) \prod_{i \in positions} P(a_i|v_j)$$

# Algoritmo Expectation Maximization (EM)

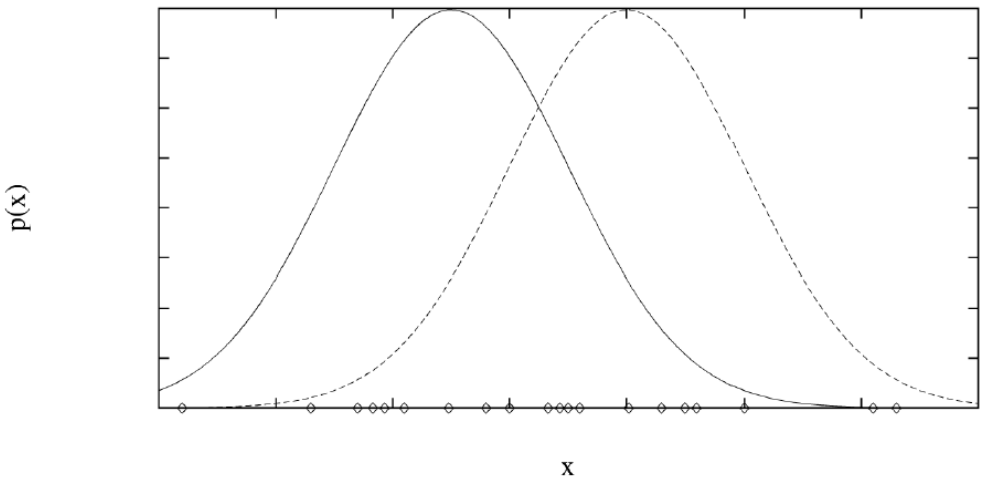
Quando utilizzarlo:

- dati solo parzialmente osservabili
- clustering non-supervisionato (valore target non osservabile)
- apprendimento supervisionato (alcuni attributi con valori mancanti)

Alcuni esempi:

- apprendimento Reti Bayesiane
- apprendimento di modelli di Markov nascosti (Hidden Markov Models)

# Esempio di EM




Assumiamo che ogni istanza $x$ sia generata:

- scegliendo una delle Gaussiane con prababilità uniforme
- generando una istanza a caso secondo la Gaussiana scelta

# EM per stimare k-medie

Date:

- istanza da $X$ generate da una mistura di $k$ Gaussiane
- medie $\langle \mu_1, \ldots, \mu_k \rangle$ sconosciute delle $k$ Gaussiane (assumiamo $\sigma^2$ conosciuto e uguale per tutte le Gaussiane).
- non si sa quale istanza $x_i$ è stata generata da quale Gaussiana

Determinare:

- stime maximum-likelihood di $\langle \mu_1, \ldots, \mu_k \rangle$

Ogni istanza può essere pensata nella forma $y_i = \langle x, z_{i1}, z_{i2} \rangle$ (caso $k = 2$), dove:

- $z_{ij}$ è 1 se l'esempio $i$ è stato generato dalla Gaussiana $j$, 0 altrimenti
- $x_i$ osservabile
- $z_{ij}$ non osservabili

# EM per stimare k-medie ($k = 2$)

Algoritmo EM: scegliere a caso l'ipotesi $h = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$, poi ripetere:

- **Passo E**: Calcola il valore atteso $E[z_{ij}]$ di ogni variabile non osservabile $z_{ij}$, assumendo valga l'ipotesi corrente $h$

$$\begin{aligned} E[z_{ij}] &= \frac{p(x = x_i | \mu = \mu_j)}{\sum_{n=1}^{2} p(x = x_i | \mu = \mu_n)} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x_i - \mu_j)^2}}{\sum_{n=1}^{2} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x_i - \mu_n)^2}} \end{aligned}$$

- **Passo M**: Calcola la nuova ipotesi maximum-likelihood $h$, assumendo che il valore preso da ogni variabile non osservabile $z_{ij}$ sia il suo valore atteso (calcolato sopra)

$$\pi_{ij} = \frac{E[z_{ij}]}{\sum_{i=1}^{m} E[z_{ij}]} \quad \text{and} \quad \mu_j \leftarrow \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} x_i$$

# Recap

Argomenti:

- Teorema di Bayes
- Ipotesi MAP, ML
- Classificazione più probabile
- Intro Naive Bayes
- Naive Bayes per documenti testuali
- Algoritmo EM

Esercizi:

- Implementare NB su documenti testuali (per esempio "Twenty User Newsgroups", `http://scikit-learn.org/stable/datasets/twenty_newsgroups.html`)
- Confrontarlo con altri classificatori