

# Basi matematiche per il Machine Learning

Corso di AA, anno 2018/19, Padova



Fabio Aioli

15 Ottobre 2018



- Un esperimento si dice **casuale/aleatorio** quando l'output non è predicibile con certezza.
- Considereremo output **discreti** (perché più semplici)
- **Una possibile interpretazione della probabilità come frequenza:** ripetendo un esperimento sotto le stesse condizioni per un numero infinito di volte, la proporzione di volte che l'output è contenuto in  $E$  tende ad un valore costante. Questa costante è la probabilità dell'evento  $E$ , ovvero  $P(E)$ .



- $0 \leq P(E) \leq 1$ . Se  $E_1$  è evento che non può mai succedere (**evento impossibile**), allora  $P(E_1) = 0$ . Se  $E_2$  è un **evento certo**, allora  $P(E_2) = 1$ .
- Se  $S$  è l'insieme di tutti i possibili output, allora  $P(S) = 1$
- Se  $E_i, i = 1, \dots, n$  sono **mutuamente esclusivi** (non possono occorrere contemporaneamente,  $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$ ), allora abbiamo:  
$$P(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i).$$
In particolare, vale  $P(E^c) = 1 - P(E)$  se  $E^c$  è l'**evento complementare** di  $E$ .
- Se l'**intersezione di due eventi**  $E$  e  $F$  è non vuota, abbiamo:  
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$



- $P(E|F)$  (o **probabilità a posteriori di  $E$  dato  $F$** ) è la probabilità di un'evento  $E$  dato che l'evento  $F$  si è verificato, ed è tale che:  
$$P(E \cap F) = P(F)P(E|F)$$
- Poiché  $P(F)P(E|F) = P(E \cap F) = P(E)P(F|E)$  (l'operatore  $\cap$  è commutativo), otteniamo la **formula di Bayes**:  
$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$
- Due eventi  $E, F$  si dicono **indipendenti** quando  $P(E|F) = P(E)$ .  
Ovvero, l'occorrenza o meno di  $F$  non dà informazione sull'eventuale occorrenza di  $E$ . Per eventi indipendenti, vale  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$



## Media e Varianza

La **media** (o valore atteso) di una variabile aleatoria  $X$ ,  $E[X]$ , è il valore medio di  $X$  ottenuto su un grande numero di esperimenti:

$$E[X] = \sum_i x_i P(x_i).$$

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[X^n] = \sum_i x_i^n P(x_i)$  momento  $n$ -esimo

La **varianza** misura quanto  $X$  varia rispetto al valore atteso nei singoli esperimenti. Sia  $\mu = E[X]$ , la varianza è definita come:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$$

Tipicamente si usa la notazione  $\sigma^2$  per denotare la varianza. La **deviazione standard** è definita come  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$



# Distribuzioni Notevoli

## Caso Discreto:

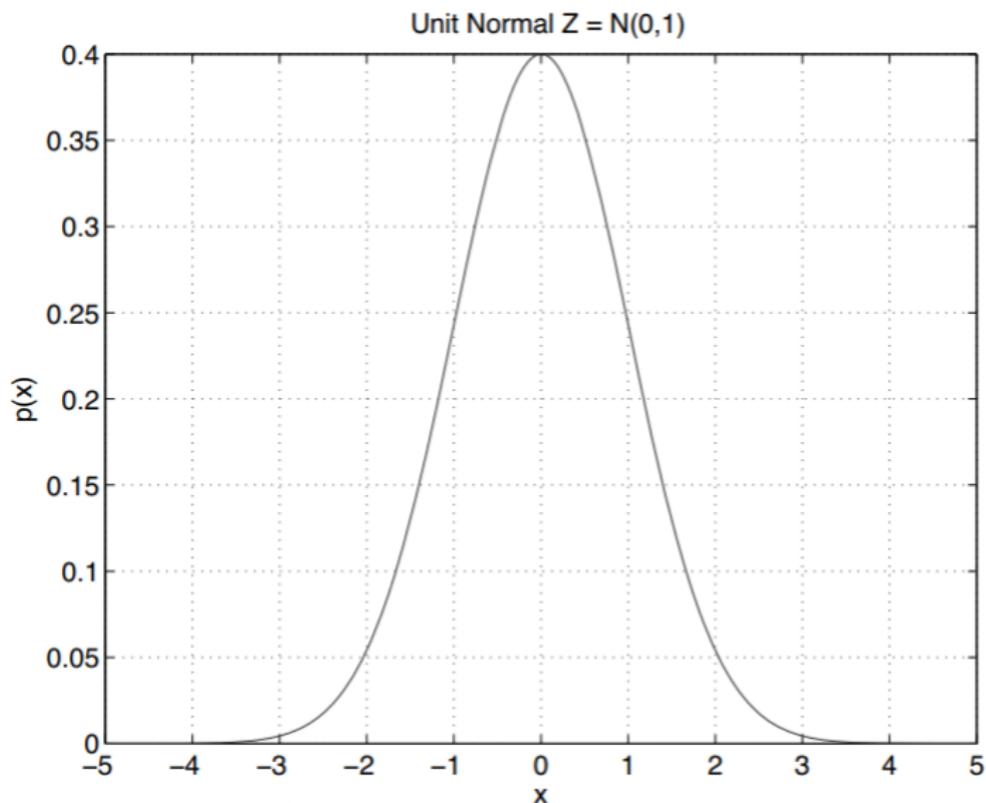
- **Bernoulli** - Output 1 (successo), 0 (fallimento).  $p$  è la probabilità di successo. Allora,  $P(X = 1) = p$  e  $P(X = 0) = 1 - p$ .  $E[X] = p$ ,  $Var(X) = p(1 - p)$ .
- **Binomiale** - Se eseguiamo  $N$  prove di Bernoulli identiche, la variabile aleatoria  $X$  che rappresenta il numero di successi ottenuti in  $N$  prove ha una distribuzione del tipo:  $P(X = i) = \binom{N}{i} p^i (1 - p)^{N-i}$ ,  $i = 0, \dots, N$

## Caso Reale:

- **Uniforme** nell'intervallo  $[a, b]$ . Allora,  $p(x) = \frac{1}{b-a}$  se  $a \leq x \leq b$  e  $p(x) = 0$  altrimenti.  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ ,  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .
- **Normale (Gaussiana)** di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < +\infty$$

# Distribuzione Normale $N(0, 1)$





Un vettore  $n$  dimensionale  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , è una collezione di  $n$  valori scalari sistemati in colonna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dati due vettori  $n$  dimensionali  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  la loro **somma** è ancora un vettore  $n$  dimensionale:

$$\begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ x_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + z_n \end{pmatrix}$$



Dati due vettori  $n$  dimensionali  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  il loro **prodotto scalare** è uno scalare:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \sum_i x_i z_i$$

La **lunghezza** di un vettore  $\mathbf{x}$  si denota  $|\mathbf{x}|$ , la lunghezza al quadrato vale:

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_i x_i^2$$

Il prodotto scalare ha una naturale interpretazione geometrica:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{x}| |\mathbf{z}| \cos(\theta)$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra i due vettori. Nota che tale quantità viene massimizzata con  $\theta = 0$  e viene annullata quando i vettori sono ortogonali.



## Vettori binari e insiemi

Quando abbiamo a che fare con vettori a valori binari  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$  possiamo dare una interpretazione insiemistica al vettore considerando un universo di  $n$  elementi e  $\mathbf{x}$  l'insieme contenente gli elementi corrispondenti agli 1 nel vettore.

La lunghezza (o norma) di un vettore indicherà il numero di elementi nell'insieme (cardinalità)

Il prodotto scalare tra due vettori indicherà il numero di elementi in comune tra i due insiemi (cardinalità dell'intersezione)

Posso calcolare la proiezione di un vettore  $\mathbf{x}$  lungo la direzione di un altro vettore  $\mathbf{z}$ , come

$$\mathbf{x}_z = \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}}{\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}} \right) \mathbf{z} = \alpha \mathbf{z}$$

Il coefficiente  $\alpha$  ha una interessante interpretazione probabilistica,  $P(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ .



Una matrice  $m \times n$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , è una collezione di valori scalari sistemati in un rettangolo di  $m$  righe e  $n$  colonne:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento  $i, j$  della matrice  $\mathbf{A}$  può essere scritto  $a_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij}$

Nota che un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  può essere visto come una matrice  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$



## Addizione e prodotto

Date due matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  della stessa dimensione,

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Date due matrici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ , il loro prodotto matriciale  $\mathbf{AB}$  è la matrice con elementi:

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_{q=1}^k [\mathbf{A}]_{iq} [\mathbf{B}]_{qj} = \sum_{q=1}^k a_{iq} b_{qj}$$

Nota bene: In generale  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$



La **trasposta**  $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  di una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  è definita da:

$$[\mathbf{A}^T]_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$$

Proprietà:

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Se  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  si dice che la matrice  $\mathbf{A}$  è **simmetrica**.



# Inversa

La matrice **identità** è una matrice diagonale (necessariamente quadrata)  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avente valori uguali a 1 nella diagonale e 0 fuori dalla diagonale.

La matrice **inversa** di una matrice quadrata  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

N.B. Non è sempre possibile trovare tale matrice (solo se il rango è massimo, determinante diverso da 0)

Se la matrice inversa esiste, allora

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Per matrici rettangolari, se la matrice quadrata  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  è invertibile, allora la matrice  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$  (detta **pseudo-inversa**) soddisfa  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{I}$ .



Una matrice simmetrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con la proprietà che  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  per ogni vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice **semidefinita positiva** (autovalori  $\geq 0$ ).

Una matrice simmetrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con la proprietà che  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  per ogni vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice **definita positiva** (autovalori  $> 0$ ).

Una matrice definita positiva è sempre invertibile! Facile da vedere perché il determinante è anche il prodotto degli autovalori.