Reti Neurali (Parte I)

Corso di AA, anno 2018/19, Padova

Fabio Aiolli

07 Novembre 2018

Reti Neurali Artificiali: Generalità

Due motivazioni diverse hanno spinto storicamente lo studio di Reti Neurali Artificiali (RNA):

- Riproduzione (e quindi comprensione) del cervello umano
  - modelli affidabili di tutto o almeno parte del cervello
  - riproduzione fedele fenomeni neuro-fisiologici
  - verifica sperimentale (il modello proposto riproduce i dati biologici?)
- Estrazione dei principi fondamentali di calcolo usati dal cervello umano
  - non importa riprodurre il cervello ma solo evincere quali sono i principi fondamentali di calcolo utilizzati
  - semplificazioni ed astrazioni permesse, anzi, strumento principale di lavoro
  - produrre un sistema artificiale, eventualmente diverso dal cervello, che riproduca le sue funzioni, magari più veloci ed efficienti (metafora del volo "aereo vs uccello")

A noi interessa la seconda motivazione!

In questo caso i modelli proposti sono molteplici e con scopi diversi:

- Apprendimento supervisionato (classificazione, regressione, serie temporali, ...)
- Apprendimento non supervisionato (clustering, data mining, self-organized maps, memorie associative, ...)

Tali modelli possono differire per:

- Topologia della rete
- Funzione calcolata dal singolo neurone
- Algoritmo di apprendimento
- Modalità di apprendimento (utilizzo dei dati di apprendimento)

Quando usare una RNA?

Caratteristiche del problema:

- Input: discreto e/o a valori reali, alta dimensionalità
- Output: vettore di valori discreti (classificazione) o reali (regressione)
- I dati (input e/o output) possono contenere rumore e la forma della funzione target totalmente sconosciuta
- Accettabile avere tempi lunghi di apprendimento e richiesta una veloce valutazione della funzione appresa
- La soluzione finale NON deve essere compresa da un esperto umano ("black box problem")

Esempi di campi applicativi:

- Riconoscimento del parlato (speech recognition)
- Classificazione di immagini (image classification)
- Predizione su serie temporali (time series prediction)

Confronto con il cervello umano

Le RNA si ispirano al cervello umano:

- Il cervello è costituito da $\sim 10^{11}$ neuroni fortemente interconnessi
- Ogni neurone è connesso con un altri $\sim 10^4$ neuroni
- Il tempo di risposta di un neurone è ~ 0.001 secondi

Considerando che:

- Per riconoscere il contenuto di una scena un umano impiega ~ 0.1 secondi
- Non può effettuare piú di ~ 100 calcoli seriali $[0.1/0.001 = 100]$
- Ne consegue che..

Il cervello umano sfrutta pesantemente il calcolo parallelo.

Un po' di storia

- 1943 McCulloch e Pitts: primi modelli matematici di una RN, input binari, combinazione lineare a soglia, output binario.
- 1958 primo schema di rete neurale, detto Perceptron (percettrone), antesignano delle attuali reti neurali. Grande entusiasmo.
- 1969 Minsky e Papert mostrano limiti del Perceptron. La ricerca in questo campo ha un notevole calo nei finanziamenti.
- 1986 Rumelhart e al. propongono l'algoritmo Backpropagation per l'apprendimento dei pesi di una rete multistrato. Nuova linfa alla ricerca.

Singolo neurone - Perceptron

Consideriamo lo spazio degli iperpiani in $\mathbb{R}^n$ (n dimensione dell'input):

$$\mathcal{H} = \{f_{(\mathbf{w},b)}(\mathbf{x}) = \text{sign}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) : \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\mathcal{H} = \{f_{\mathbf{w}'}(\mathbf{x}') = \text{sign}(\mathbf{w}' \cdot \mathbf{x}') : \mathbf{w}', \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n\}$$

effettuando le seguenti trasformazioni:

$$\mathbf{w}' = [b, \mathbf{w}], \quad \mathbf{x}' = [1, \mathbf{x}]$$

Faremo riferimento a tale neurone (e all'algoritmo di apprendimento associato) come Perceptron.

Funzioni booleane e Perceptron

Consideriamo input binari e funzioni booleane.

- Ogni funzione booleana può essere rappresentata tramite gli operatori or,and,not
- Può un Perceptron implementare la or? SI!
  Es. $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{n+1}, \mathbf{w}'_0 = -0.5, \{\mathbf{w}_i = 1\}_{i=1,\ldots,n}$
- Può un Perceptron implementare la and? SI!
  Es. $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{n+1}, \mathbf{w}'_0 = -n + 0.5, \{\mathbf{w}_i = 1\}_{i=1,\ldots,n}$
- La not si realizza banalmente con un Perceptron avente una singola connessione (fare per esercizio)

Quindi una qualsiasi funzione booleana può essere realizzata come combinazione di Perceptron!

Esiste una funzione booleana semplice NON REALIZZABILE da un singolo Perceptron?

SI, vista quando abbiamo parlato di VC-dim dello spazio di iperpiani in $\mathbb{R}^n$

Algoritmo di apprendimento del Percpetron

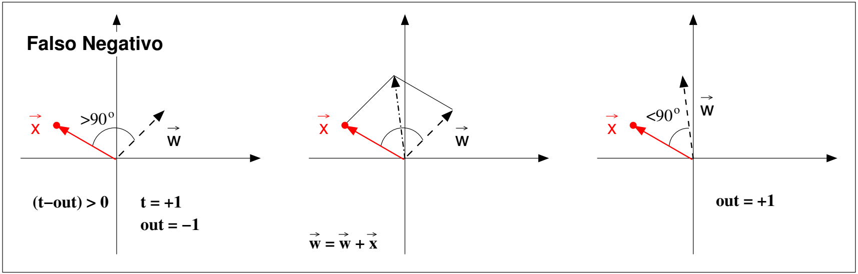
Assumiamo di avere esempi di apprendimento linearmente separabili, ovvero tali che esiste un iperpiano che li possa separare.

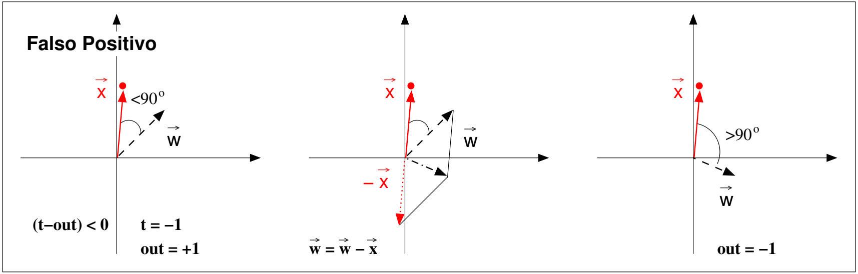
Perceptron

Input: Insieme di apprendimento $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}, t)\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, t \in \{-1, +1\}$, $\eta \geq 0$ (learning rate)

1. Inizializza il valore dei pesi $\mathbf{w}$ ad un vettore random
2. Ripeti
   (a) Seleziona (a caso) uno degli esempi di apprendimento $(\mathbf{x}, t)$
   (b) Se $o = \text{sign}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) \neq t$, allora
   $$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \eta(t - o)\mathbf{x}$$

Interpretazione Geometrica



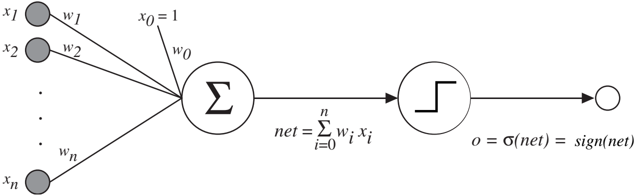


Osservazioni

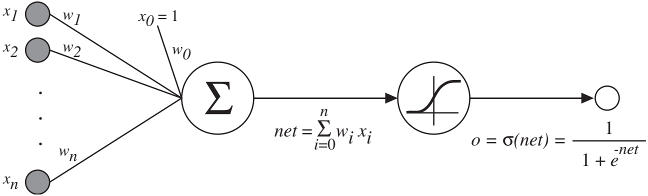
- Non necessariamente un singolo passo di apprendimento (passo 2(b)) riuscirà a modificare il segno dell'output, potrebbero servire più passi
- Il coefficiente η learning rate serve per rendere più stabile l'apprendimento, ovvero evita che il vettore dei pesi subisca variazioni troppo "violente" quando il passo 2(b) viene eseguito
- Se l'insieme di apprendimento è linearmente separabile, si dimostra che l'algoritmo di apprendimento per il Perceptron termina con una soluzione in un numero finito di passi
- Sia R il raggio della più piccola iper-sfera centrata nell'origine che contiene tutti gli esempi, i.e. $||\mathbf{x}_i|| <= R$, sia γ il massimo valore tale che $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) \geq \gamma > 0$, allora il numero di passi dell'algoritmo del perceptron è limitato superiormente dal rapporto R^2/γ^2.

Neurone Artificiale

Alternativa 1: Hard-threshold



Alternativa 2: Neurone con sigmoide (derivabile)

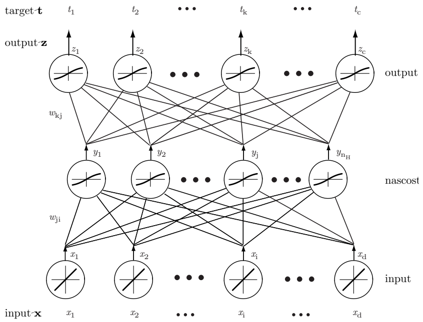


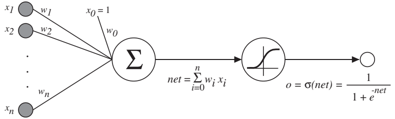
Reti Neurali Multistrato

Una RNA multistrato (multi-layer NN) è un sistema costituito da unità interconnesse che calcolano funzioni (numeriche) non-lineari:

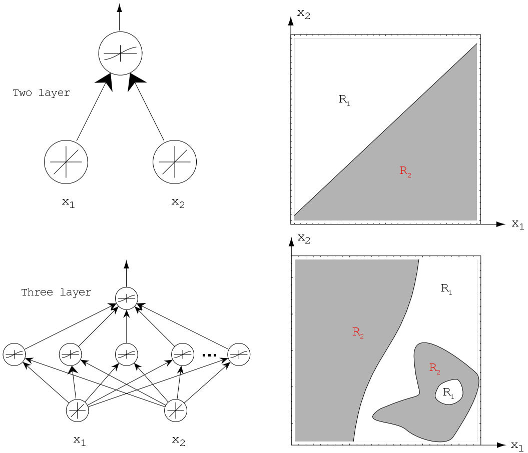
- Le unità di input rappresentano le variabili in ingresso
- Le unità di output rappresentano le variabili di uscita
- Le unità nascoste (se ve ne sono) rappresentano variabili interne che (dopo l'apprendimento) codificano le correlazioni tra le variabili di input, relativamente al valore di output che si vuole generare
- Sulle connessioni tra unità sono definiti pesi adattabili (dall'algoritmo di apprendimento)

Reti Neurali Multistrato





Superfici di decisione



Recap

Nozioni

- Perceptron
- Funzioni booleane e Perceptron
- Algoritmo di apprendimento del Perceptron
- Convergenza del Perceptron
- Introduzione alle reti neurali multi-strato

Esercizi

- Dare reti multi-strato basate su Perceptron con soglia hard e relativi pesi (senza usare apprendimento) che realizzino funzioni booleane semplici quali: `A and (not B)`, `A xor B`,...
- Dimostrare che se l'algoritmo Perceptron viene inizializzato con il vettore nullo, allora il coefficiente η non influenza l'apprendimento.
- Implementare l'algoritmo Perceptron.