ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

(Viene dato un cenno di soluzione del Tema 1. I Temi 2, 3 e 4 possono essere svolti in modo del tutto simile)

TEMA 1

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\cos(3x) - 1}{\cos(3x) + 1}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.
È pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
È anche periodica di periodo $\frac{2}{3}\pi$, quindi basta studiarla in $[0, \frac{\pi}{3}[$.
$f(x) \geq 0$ se e solo se $\arctan\left(\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1}\right) \geq -\frac{\pi}{3}$, che, essendo $\arctan(\cdot)$ crescente, equivale a $\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1} \geq \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. Risolvendo, si ottiene che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq x^* = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ che è un numero appartenente a $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{3}$.
$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3}^-)} f(x) = -\frac{\pi}{6}$ (si noti che in questo caso $\cos(3x) \to -1^+$).
Non ci sono asintoti. Si può estendere la funzione ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1}\right)^2}\left(\frac{\cos(3x) - 1}{\cos(3x) + 1}\right)' = ... = \frac{-3\sin(3x)}{\cos^2(3x) + 1}.$$

Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente in $[0, \frac{\pi}{3}[$. Il punto $x = 0$ (e tutti i punti $x_k = \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$) è un punto di massimo relativo ed assoluto, mentre $x = \frac{\pi}{3}$ (e tutti i punti $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$) è un punto di minimo relativo ed assoluto.
L' attacco di f' in $\frac{\pi}{3}$ è $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f'(x) = 0$.

Quindi f si può estendere ad una funzione continua e derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \frac{-9\cos(3x)}{(\cos^2(3x)+1)^2}\,(\cos^2(3x)+1+2\sin^2(3x)).$$

Quindi f è concava in $[0, \frac{\pi}{6}[$ e convessa in $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ e ha un flesso in $x = \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(\tan 1)/2} \log\left(1+\arctan^2(2x)\right)\,\frac{1}{1+4x^2}\,dx.$$

Facoltativo: dimostrare che $\nexists\ c \in [0, (\tan 1)/4]$ tale che $\int_0^c \log(1+\arctan^2(2x))\,\frac{1}{1+4x^2}\,dx = 2$.

Cenno della risoluzione

Con la sostituzione $y = \arctan(2x)$ (per cui $dy = \frac{2}{1+4x^2}\,dx$ e $y(0) = 0$, $y((\tan 1)/2) = 1$) l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \log\left(1+y^2\right)\,dy = \frac{1}{2}\left\{y\log(1+y^2)\big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}\,dy\right\} = \frac{1}{2}\left\{y\log(1+y^2) - 2y + 2\arctan y\big]_0^1\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - 1,$$

dove nel primo passaggio si è integrato per parti.

Esercizio 3

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{2\cdot n^5 + 5n\cdot 2^n + n!}{n^{n+1}\cdot\log(1+\frac{3}{n}) + n\cdot(-1)^{n+1}}.$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Cenno della risoluzione

Per la scala delle successioni infinite, $2\cdot n^5$, $5n\cdot 2^n = o(n!)$. Inoltre usando Mac-Laurin e la scala delle successioni infinite, $n^{n+1}\cdot\log(1+\frac{3}{n}) = n^{n+1}(\frac{3}{n}+o(\frac{3}{n})) = 3n^n + o(n^n)$ e $n\cdot(-1)^{n+1} = o(n^n)$. Quindi

$$a_n \sim \frac{n!}{3n^n}$$

e $\lim_n a_n = 0$ sempre per la scala. Inoltre per il teorema di confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$. Usando il criterio del rapporto per quest'ultima:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = ... = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Poichè $\frac{1}{e} < 1$, la serie data converge.