

ANALISI MATEMATICA 1
Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

TEMA 1

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan \left(\frac{\cos(3x) - 1}{\cos(3x) + 1} \right) + \frac{\pi}{3}.$$

- (a) Determinare il dominio di f , eventuali simmetrie e periodicità.
- (b) Determinare il segno di f (non è essenziale per lo studio del grafico di f , si consiglia di rispondere a questa domanda dopo aver svolto gli altri esercizi).
- (c) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.
- (d) Studiare la continuità e la derivabilità di f ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f . Calcolare i limiti di f' , se significativi.
- (e) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.
- (f) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(\tan 1)/2} \log(1 + \arctan^2(2x)) \frac{1}{1 + 4x^2} dx.$$

Esercizio 3

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{2 \cdot n^5 + 5 \cdot 2^n + n!}{n^{n+1} \cdot \log(1 + \frac{3}{n}) + n \cdot (-1)^{n+1}}.$$

- (a) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- (b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 4, Facoltativo (non valutato per l'ammissione all'orale)

Utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 2, dimostrare che

$\nexists c \in [0, (\tan 1)/4]$ tale che $\int_0^c \log(1 + \arctan^2(2x)) \frac{1}{(1+4x^2)^2} dx = 2$.

Tempo: due ore e mezza.

ANALISI MATEMATICA 1
Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

TEMA 2

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\cos(5x) - 1}{\cos(5x) + 1}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

- (a) Determinare il dominio di f , eventuali simmetrie e periodicità.
- (b) Determinare il segno di f (non è essenziale per lo studio del grafico di f , si consiglia di rispondere a questa domanda dopo aver svolto gli altri esercizi).
- (c) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.
- (d) Studiare la continuità e la derivabilità di f ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f . Calcolare i limiti di f' , se significativi.
- (e) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.
- (f) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(e^2-1)/2} \log(1 + \log^2(2x+1)) \frac{1}{2x+1} dx.$$

Esercizio 3 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n! - 3 \cdot n^3 \log n + 5 \cdot 3^n}{n \cdot \cos^2 n + n^{n+1} \cdot \arcsin\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

- (a) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- (b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 4, Facoltativo (non valutato per l'ammissione all'orale)

Utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 2, dimostrare che

$\nexists c \in [0, (e^2 - 1)/4]$ tale che $\int_0^c \log(1 + \log^2(2x+1)) \frac{1}{(2x+1)^2} dx = 2$.

Tempo: due ore e mezza.

ANALISI MATEMATICA 1
Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

TEMA 3

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1 - \cos(3x)}{1 + \cos(3x)}\right) - \frac{\pi}{3}.$$

- (a) Determinare il dominio di f , eventuali simmetrie e periodicità.
- (b) Determinare il segno di f (non è essenziale per lo studio del grafico di f , si consiglia di rispondere a questa domanda dopo aver svolto gli altri esercizi).
- (c) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.
- (d) Studiare la continuità e la derivabilità di f ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f . Calcolare i limiti di f' , se significativi.
- (e) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.
- (f) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(\tan 1)/3} \log(1 + \arctan^2(3x)) \frac{1}{1 + 9x^2} dx.$$

Esercizio 3

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{4^{n+1} - n! - 3^n \cdot (n+1)}{n^2 \cdot \sin n + n^{n+1} \cdot \log(1 - \frac{1}{2n})}.$$

- (a) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- (b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 4, Facoltativo (non valutato per l'ammissione all'orale)

Utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 2, dimostrare che

$\nexists c \in [0, (\tan 1)/6]$ tale che $\int_0^c \log(1 + \arctan^2(3x)) \frac{1}{(1+9x^2)^2} dx = 1$.

Tempo: due ore e mezza.

ANALISI MATEMATICA 1
Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

TEMA 4

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1 - \cos(5x)}{1 + \cos(5x)}\right) - \frac{\pi}{3}.$$

- (a) Determinare il dominio di f , eventuali simmetrie e periodicità.
- (b) Determinare il segno di f (non è essenziale per lo studio del grafico di f , si consiglia di rispondere a questa domanda dopo aver svolto gli altri esercizi).
- (c) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.
- (d) Studiare la continuità e la derivabilità di f ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f . Calcolare i limiti di f' , se significativi.
- (e) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.
- (f) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(e^2-1)/3} \log(1 + \log^2(3x+1)) \frac{1}{3x+1} dx.$$

Esercizio 3

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{2^n \cdot \log n + 2 \cdot n^6 - n!}{n^2 \cdot (-1)^{n+1} - n^{n+1} \cdot \tan(\frac{1}{3n})}.$$

- (a) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- (b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 4, Facoltativo (non valutato per l'ammissione all'orale)

Utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 2, dimostrare che

$$\nexists c \in [0, (e^2 - 1)/6] \text{ tale che } \int_0^c \log(1 + \log^2(3x+1)) \frac{1}{(3x+1)^2} dx = 2.$$

Tempo: due ore e mezza.