ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 28-01-2009

(Viene dato un cenno di soluzione del Tema 1 e del solo Es. 1 del Tema 2. Gli esercizi rimanenti del Tema 2 e i Temi 3 e 4 possono essere svolti in modo del tutto simile a questi.)

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log(9-x^2)}}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = \{|x| < 3, x \neq \pm 2\sqrt{2}\}$. È sempre positiva e pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^+} f(x) = 0$ (si noti che in questo caso $\log(9-x^2) \to 0^-$).
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^-} f(x) = +\infty$ (si noti che in questo caso $\log(9-x^2) \to 0^+$).
Si può estendere la funzione in $[2\sqrt{2}, 3]$ ad una funzione continua.
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log(9-x^2)}} \frac{-2}{\log^2(9-x^2)} \frac{1}{9-x^2}(-2x).$$

Quindi $f(x)$ è strettamente crescente nei due intervalli $[0, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 3)$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Studiamo ora gli attacchi agli estremi del dominio dove il limite della funzione è finito.
$\lim_{x\to 3} f'(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^+} f'(x) = 0$.
Per calcolare quest'ultimo limite si può usare il fatto che il fattore $\frac{4x}{9-x^2}$ è limitato in un intorno di $2\sqrt{2}$ e per l'altra parte si può usare la sostituzione $y = \frac{1}{\log(9-x^2)}$, se $x \to (2\sqrt{2})^+$, si ha $y \to -\infty$, quindi il limite si riconduce allo studio del limite $\lim_{y\to-\infty} e^{2y}y^2$ che si riconduce alla scala degli infiniti con l'ulteriore sostituzione $z = -y$.

Esercizio 2 Calcolare il seguente limite al variare del parametro $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - 2\sin^2 x + 1 - e^{-x^2}}{x - \arctan\left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + 4^{-\frac{1}{3x}}}$$

Cenno della risoluzione
$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.
$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
Quindi il numeratore diventa

$$NUM. = x^a - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

$\arctan(x + \frac{x^3}{6}) = (x + \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Il termine $4^{-\frac{1}{3x}} = o(x^3)$.
Quindi il denominatore diventa

$$DENOM. = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}.$$

Quindi si hanno tre casi:
1) $a > 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = -\infty$
2) $a = 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 0$
2) $a < 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a+o(x^a)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = +\infty$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x) + \sin x}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}\, dx.$$

Cenno della risoluzione Tenendo conto che $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ raccogliendo al numeratore $\sin x$ e usando la sostituzione $\cos x = y$ l'integrale diventa

$$-\int_1^0 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy = \int_0^1 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy.$$

Tendo conto che $y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2)$ la funzione razionale si può decomporre:

$$\frac{2y+1}{(y-3)(y-2)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y-2}$$

con $A = 7$ e $B = -5$ e si ottiene così

$$\int_0^1 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy = \int_0^1 \frac{7}{y-3} dy - \int_0^1 \frac{5}{y-2}\, dy = 7\log 2 - 7\log 3 + 5\log 2 = 12\log 2 - 7\log 3.$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log(x^2-4)}}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = (]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[) \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$. È sempre positiva e pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^+} f(x) = +\infty$ (si noti che in questo caso $\log(x^2-4) \to 0^+$).
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-} f(x) = 0$ (si noti che in questo caso $\log(x^2-4) \to 0^-$).
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (asintoto orizzontale)
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log(x^2-4)}} \frac{3}{\log^2(x^2-4)} \frac{1}{x^2-4}(-2x).$$

Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente nei due intervalli $]2, \sqrt{5}[$, $]\sqrt{5}, +\infty[$. La funzione non ha min e max relativi ed assoluti (se si prolunga per continuità in 2^+ e in $\sqrt{5}^-$ ha max rel. in 2 e min rel. e assoluto in $\sqrt{5}$). $\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$. Studiamo ora gli attacchi agli estremi del dominio dove il limite della funzione è finito.
$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-} f'(x) = 0$.
Per calcolare quest'ultimo limite si possono usare gli argomenti usati nella sol. dell'Es.1 del Tema 1.