Analisi Matematica 1, a.a. 2008-2009

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

Schema riassuntivo del metodo per trovare una soluzione particolare di una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti quando il termine noto è un polinomio oppure è della forma $e^{\alpha x}$ o $\cos(\beta x)$ o $\sin(\beta x)$ o una loro combinazione lineare.

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Sia $b(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ (oppure, $b(x) = P(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$), dove $P(x)$ è un polinomio e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nel seguito, indicheremo con

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad \Delta = a_1^2 - 4a_0$$

l'equazione caratteristica e il suo "delta".

CASO 1. Se $\bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare è del tipo:

$$\overline{y}(x) = Q(x)e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e A, B sono costanti da terminarsi caso per caso, cosiccome i coefficienti del polinomio $Q(x)$.

CASO 2. (fenomeno della risonanza) Se $\bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica, cioè se $p(\bar{\lambda}) = 0$, si ha

$$\overline{y}(x) = x^m\, Q(x)e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

dove m è la molteplicità di $\bar{\lambda}$ coma radice dell'equazione caratteristica.

Casi particolari.

1. $b(x) = P(x)$**, polinomio:** risonanza solo quando $\bar{\lambda} = 0$ è radice dell'equazione caratteristica; quindi solo quando $a_0 = 0$: $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda = 0$.

1. $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$**, polinomio per esponenziale:** risonanza solo quando $\bar{\lambda} = \alpha$ è radice dell'equazione caratteristica

(NB: può accadere solo quando il polinomio caratteristico ha $\Delta > 0$ (e allora la molteplicità è $m = 1$) oppure $\Delta = 0$ (e allora $m = 2$))

1. $b(x) = P(x)\sin(\beta x)$ **o** $b(x) = P(x)\cos(\beta x)$**, polinomio per f. trigonometrica:** risonanza solo quando $\bar{\lambda} = \pm i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica; quindi solo quando $a_1 = 0$ e $a_0 > 0$: $p(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2 = 0$. È sempre $m = 1$.