Analisi Matematica 1, a.a. 2008-2009

Complementi sugli integrali impropri.

Il teorema del confronto asintotico

Siano f e g: $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0, \forall x \geq a$.
i) se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, $L \in \mathbb{R}$,
$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente se e solo se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è convergente.
ii) Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è convergente allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.
iii) Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,
se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è divergente allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è divergente.

Una condizione necessaria di integrabilità:

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.
Se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ allora deve essere $L = 0$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x^p}$ con $x \to +\infty$

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$ e $\int_1^x f(t)dt$ esiste $\forall x \geq 1$.
i) Se $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L \geq 0$, $(L \in \mathbb{R})$, per qualche $p > 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.
ii) Se $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L > 0$ $(\textit{oppure} +\infty)$, per qualche $p \leq 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è divergente.

Scala di funzioni integrabili in $[2, +\infty)$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ è integrabili
1) per $\alpha = 1$ e $\beta > 1$,
oppure
2) per $\alpha > 1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x^p}$ con $x \to 0^+$

Sia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ e tale che $\int_x^1 f(t)dt$ esiste $\forall x \in (0, 1]$.
i) Se $\lim_{x\to0^+} x^p f(x) = L \geq 0$, $(L \in \mathbb{R})$, per qualche $p < 1$ allora $\int_0^1 f(x)dx$ è convergente.
ii) Se $\lim_{x\to0^+} x^p f(x) = L > 0$ $(\textit{oppure} +\infty)$, per qualche $p \geq 1$ allora $\int_0^1 f(x)dx$ è divergente.