

PROGRAMMA di Analisi Matematica 1
A.A. 2008-2009, canale 1, prof.: Francesca Albertini, Claudio Marchi
Ingegneria gestionale, meccanica e mecatronica, Vicenza

Testo Consigliato:

Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.
Appunti di lezione e complementi in rete (<http://www.math.unipd.it/~albertin>).

PARTE 1: Elementi di base

Cap. 1: Introduzione

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- 1.1 Insiemi numerici: \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} . Proprietà delle operazioni, relazione d'ordine.
- 1.2 Numeri reali: definizione dei numeri reali con gli allineamenti decimali. Proprietà di densità di \mathbf{Q} in \mathbf{R} . Principio di Archimede in \mathbf{R} . Lemma: \mathbf{Q} non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.). Definizione di valore assoluto e sue prime proprietà
- 1.2.1 Estremo inferiore, superiore e completezza: maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Caratterizzazione di sup e inf (anche infiniti). Lemma: se esiste il massimo (o il minimo) esso è unico (con dim.). Proprietà di completezza di \mathbf{R} .
- 1.4 Disuguaglianze notevoli: disuguaglianza triangolare (con dim.), disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (con dim.), relazione tra la media aritmetica e la media geometrica per due (con dim.) o più elementi.
- 1.5 Sommatorie: definizione e loro proprietà. La somma di una progressione geometrica (con dim.), la somma di una progressione telescopica (con dim.).
- 1.6 Principio di induzione: enunciato, (dim e proprietà dei numeri naturali, facoltativo). Esempi di dimostrazioni per induzione: disuguaglianza di Bernoulli (con dim.).

- App. 1.B Fattoriali, coefficienti binomiali: definizioni e proprietà. Formula del binomio di Newton.

Cap. 2: Funzioni

- 2.1 Funzione, dominio, immagine, grafico definizioni ed esempi. Codominio, immagine e antimmagine di un insieme. Restrizione di una funzione. Dominio naturale di una funzione.
- 2.3 Funzione iniettiva e suriettiva: definizione e caratterizzazioni equivalenti. Risolvibilità di un'equazione.

- 2.4 Funzione composta: definizione di composizione di funzioni e proprietà della composizione.
- 2.5 Funzione inversa: definizione e caratterizzazione della f inversa. Grafico della f inversa nei reali.
- 2.2 Funzioni limitate: superiormente, inferiormente, limitate. Caratterizzazione del sup e inf di funzioni e del massimo e del minimo.
- 2.7 Operazioni con le funzioni.
- 2.6 Funzione monotona: crescente, decrescente: Composizione di funzioni monotone. (Dal Cap. 3) 3.1 Funzioni pari e dispari, funzioni periodiche: definizioni e proprietà.

Cap. 3: Introduzione allo studio qualitativo

- 3.1.1 Funzione lineare e funzione potenza: definizione e proprietà delle funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n -esime in \mathbf{R} ; - potenze ad esponente intero, razionale, reale, loro proprietà e grafici. (Si vedano anche le proprietà in 1.2.2)
- Funzione valore assoluto: definizione, proprietà e grafico. (Appunti di lezione)
- 3.1.2 Funzione esponenziale e logaritmica: loro proprietà e grafici.(Si vedano anche le proprietà in 1.2.2)
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse: definizioni, loro proprietà e grafici. (Si vedano gli appunti di lezione, le definizioni e proprietà in Cap. 1, App. 1.A e in Cap. 2, 2.5.1)
- Funzioni iperboliche e loro inverse: definizioni, loro proprietà e grafici. (Cap. 6, 6.2.1)

PARTE 2: Funzioni di una variabile

Cap. 4: Proprietà locali e concetto di limite

- 4.1 Intorni: definizione di distanza, distanza euclidea, intorno sferico di x_0 reale. Definizione di retta ampliata e di intorno di $\pm\infty$. Proprietà degli intorni (topologia). Definizione di punto di accumulazione e di punto isolato. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Definizione di proprietà che una funzione possiede "definitivamente" per $x \rightarrow x_0$.
- 4.1.1 Insiemi aperti e chiusi: definizione di punto interno, esterno di frontiera ad un insieme. Definizione di insieme aperto e insieme chiuso; un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione reali. Teorema: Se $E \subset \mathbf{R}$ è chiuso e limitato, allora ammette massimo e minimo reali (con dim.).
- 4.2. Limite: definizione di limite (con gli intorni ed esplicita, sia per x_0 ed l reali che infiniti $\forall \varepsilon \exists \delta \dots$, ecc..-). Teorema di unicità del limite (con dim.). Definizione di limite destro e sinistro.

- 4.3. Proprietà dei limiti: limitatezza locale delle funzioni con limite finito (con dim.), Teorema di permanenza del segno (dim. facoltativa), Teorema del confronto (con dim. nel caso di limite reale). Teoremi di calcolo: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito (con dim.). Limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata (con dim.). Limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita. Forme indeterminate. Teorema di esistenza del limite dx e sx per funzioni monotone (con dim. nel caso di f crescente e limite sinistro). Teorema sul limite di funzione composta (con dim.) Limiti delle funzioni elementari.
- 4.4. Primi limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e derivati. Scala di funzioni infinite a $+\infty$.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \rightarrow x_0$. Funzioni infinite o infinitesime non confrontabili per $x \rightarrow x_0$. Definizione di o-piccolo, O-grande e di funzioni asintotiche per $x \rightarrow x_0$. Principali proprietà di o-piccolo. Funzioni campione e concetto di ordine di infinito o infinitesimo rispetto al campione per $x \rightarrow x_0$. Uso del concetto di o-piccolo, di funzione asintotica e delle scale di infiniti e infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ nel calcolo dei limiti (Cap. 6, 6.1).

Cap. 5: Successioni e serie

- 5.1. Successioni a valori in \mathbf{R} : definizione di limite di successione. Successione convergente, divergente e irregolare. Teoremi sui limiti di successione (riformulazione dei teoremi sulle funzioni, in particolare Teorema di Permanenza del Segno con dim.). Scala di successioni infinite.
- Criterio del rapporto per successioni. (con dim.)
- 5.2. Il numero e . Definizione di e come limite di successione (con dim.).
- 5.3. Sottosuccessioni: definizione. Teorema: una successione ha limite l se e solo se tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite.

Cap. 6: Ulteriori elementi della teoria dei limiti

- 6.2. Ulteriori limiti notevoli (derivati dalla definizione di e).
- 6.3 Teorema "ponte" (di collegamento tra il limite di funzione e quello di successione.)

Cap. 7: Funzioni Continue da \mathbf{R} in \mathbf{R}

- 7.1 Definizione di funzione continua, e di continuità da destra e da sinistra. Teorema della permanenza del segno. Teorema sulla continuità della funzione composta.
- 7.2 Definizione di punti di discontinuità: eliminabili, discontinuità di prima e di seconda specie. Teorema sui punti di discontinuità per le funzioni monotone. Funzioni estendibili per continuità di f .

- 7.3 Teoremi sulle funzioni continue in un intervallo: Teorema degli zeri (con dim.) e sua applicazione al caso di due funzioni (Corollario 7.1) Teorema dei valori intermedi (con dim.) e sua conseguenza (Corollario 7.2). Teorema sull'invertibilità delle funzioni monotone (con dim.).
- 7.4 Teorema sulla continuità della funzione inversa (con dim. se il dominio e' un intervallo).
- 7.5 Teorema sull'immagine di un compatto (Teorema 7.8), Teorema di Weierstrass (con dim.).

Cap. 8: Calcolo differenziale: funzioni da \mathbf{R} in \mathbf{R}

- 8.1 Retta tangente, derivata: definizione di derivata; significato geometrico della derivata e definizione di retta tangente; scrittura equivalente della derivabilità di f con o -piccolo. Teorema 8.2: f derivabile implica f continua (con dim.)
- 8.2 Derivata destra e sinistra, punto angoloso, cuspidi: definizioni.
- 8.3 Proprietà elementari della derivata: Teorema 8.3, sull'algebra delle derivate; Teorema 8.4, derivata di una f composta (con dim.); Teorema 8.5, derivata di f^{-1} (con dim.)
- 8.4 Derivate delle f elementari.
- 8.5 Calcolo delle derivate.
- 8.6 Estremi locali e derivate: Definizione di minimo e massimo locale per f ; Teorema di Fermat (con dim., compreso Lemma 8.1); definizione di punto critico o stazionario e Corollario 8.1
- 8.7 Teorema del valor medio e applicazioni: Teorema di Rolle (con dim.); Teorema di Lagrange o del valor medio (con dim.), Teorema di Cauchy.
- 8.7.1 Monotonia e derivata: Teorema 8.10 (con dim.)
- 8.7.2 Teorema di de l' Hôpital (con dim. solo nel caso di f e g infinitesime e a reale); Teorema 8.12 (sul limite di f') (con dim.).
- 8.8 Derivate successive: definizione di derivata n -esima.
- 8.11 Polinomio di Taylor: definizione; Teorema di Peano (con dim.); sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari.
- 8.12 Applicazioni del Teorema di Peano: Teorema 8.18, derivate successive nei punti stazionari; 8.12.1 Limiti con gli sviluppi.
- Asintoti di una funzione f (Cap. 6, 6.4). 8.9 Funzioni convesse e concave: definizione. Teoremi 8.14 e 8.15 (caratterizzazione di f convessa per f derivabili). Definizione di flesso. Teorema 8.16 ($f''(x_0) = 0$ se x_0 è punto di flesso.)
- 8.10 Studio di funzione

Cap. 9: Integrali

- 9.1 Definizione di suddivisione di un intervallo, di somma inferiore e somma superiore. Lemma sulla monotonia della somme integrali (Lemma 9.1). Definizione di integrale secondo Riemann per una funzione f limitata.
- 9.2 Teoremi di integrabilità delle f continue, delle funzioni monotone e delle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
- 9.3 Proprietà dell'integrale definito: additività, linearità, monotonia, proprietà del valore assoluto. Teorema della media (con dim.).
- 9.4 Definizione di funzione integrale, Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.)
- 9.4.1 Definizione di primitiva di f . Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo (con dim.), Corollario (9.1) sulla relazione tra le primitive e la funzione integrale di una f continua su un intervallo (con dim.). Definizione di integrale indefinito. Integrali indefiniti immediati.
- 9.5 Formula di integrazione per parti (con dim.). Formula di integrazione per sostituzione (con dim.)
- 9.6 Integrazione delle funzioni razionali (solo nel caso in cui il denominatore abbia grado ≤ 2).
- 9.7 Definizione di integrale improprio per f continua e non negative su un intervallo illimitato. Definizione di integrale improprio su $[a, b]$ per f continua e non negativa in (a, b) e definita anche in al più uno dei due estremi. Condizione necessaria di integrabilità su intervalli illimitati di una funzione che ammetta limite a ∞ (appunti in rete). Teoremi sull'integrale improprio: teoremi del confronto, del confronto asintotico, del confronto asintotico con $1/x^p$, $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow 0$ (appunti in rete). Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ e di $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, al variare di α e β (appunti in rete).

Cap. 5: Serie Numeriche

- 5.7 Definizione di somma parziale e di somma di una serie. Definizione di serie convergente, divergente e indeterminata. Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dim.) Teoremi sulla somma di due serie regolari e sul prodotto di una serie regolare per una costante. La serie geometrica (definizione e proprietà con dim.)
- 5.8 Definizione di serie a termini non negativi. Teorema sulle serie a termini non negativi (con dim.) La serie armonica (definizione e proprietà, con dim.) e la serie armonica generalizzata.
- Teorema: Il carattere di una serie non varia se si cambiamo un numero finito di elementi. (fac.)
- 5.8.1 e 5.8.3 Criteri di convergenza per serie non negative: criterio del confronto (con dim.), del confronto asintotico, del rapporto e della radice.

- 5.9 Definizione di convergenza assoluta. Teorema: una serie assolutamente convergente è convergente (con dim.) Serie a termini di segno alterno: definizione e criterio di convergenza.
- 9.8 Criterio dell'integrale per serie a termini non negativi.

PARTE 4: Equazioni Differenziali

Cap. 16: Equazioni differenziali ordinarie

- Definizione di equazione differenziale di ordine 2 e del problema di Cauchy. Definizione di equazione differenziale di ordine n .
- 16.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine: definizione di equazione omogenea associata. Teorema 16.1 sull'integrale generale dell' omogenea (con dim.). Soluzione dell'equazione non omogenea, Teorema 16.2 (con dim.). Teorema 16.3 sull'integrale generale della non omogenea (con dim.).
(le precedenti 2 dim. possono essere sostituite dall'unica dim, fatta a lezione, a scelta).
- 16.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale: equazioni a variabili separabili. Definizione di intervallo massimale. Teorema 16.4 sull'esistenza e sull'unicità locale della soluzione. Teorema 16.5 sull'esistenza globale della soluzione.
(gli enunciati dei due precedenti teoremi possono essere sostituiti da quelli dati a lezione nel caso particolare delle equazioni a variabili separabili, a scelta)
- 16.6 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: 16.6.1 equazioni omogenee. Teorema 16.11 sull'equazione caratteristica. 16.6.2 Equazioni non omogenee. Metodo di soluzione quando il termine noto è della forma $e^{\lambda t}[p(t) \cos(wt) + q(t) \sin(wt)]$ (2. metodo ad hoc, pag.450).
- Risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine del tipo $y'' = f(y', x)$ (dove manca la dipendenza dalla variabile y).

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.