

Calcolo numerico di integrali definiti su intervalli limitati

Alvise Sommariva

Venezia, Ottobre 18, 2024

Cinque incontri per i Lincei - Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti

In questo incontro incardinato nella serie [Cinque incontri per i Lincei - Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti](#), si desidera

- mostrare con esempi pratici e notevoli, l'importanza dell'integrazione simbolica e numerica;
- introdurre esempi di integrazione numerica, mediante software simbolici.
- citare alcuni ambienti numerici utili al calcolo di integrali definiti.

Di seguito

- introduciamo il concetto di interpolazione polinomiale;
- mostriamo come mediante interpolazione si ottengano formule di quadratura di tipo *Newton-Cotes*, di cui fanno parte le note regole del trapezio e di Cavalieri-Simpson;
- descriviamo svantaggi delle formule di Newton-Cotes e i vantaggi delle formule composte;
- mediante routines specifiche in Matlab/Octave, valutiamo su esempi pratici i metodi sopra citati.

Il calcolo di integrali definiti é di **interesse** per la formazione e aggiornamento per gli insegnanti della Scuola secondaria di secondo grado, in quanto é un argomento tipicamente svolto nell'ultimo anno di alcuni corsi (ad esempio, ma non solo, nei licei scientifici).

Come ben noto, il problema consiste nel calcolare la quantità

$$\int_a^b f(x) dx$$

dove l'integranda f é una funzione che usualmente é **continua** nell'intervallo limitato $[a, b]$.

Nota. (Generalità)

Ovviamente si possono studiare *esempi piú generali*, ad esempio f potrebbe avere un numero finito di discontinuitá di salto, ma non prenderemo in considerazione queste evenienze.

Nota. (Funzioni continue patologiche)

Ricordiamo che già all'interno delle funzioni continue esistano esempi molto anomali, come la *funzione di Weierstrass*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi k^2 x)}{\pi k^2}$$

continua ovunque ma differenziabile solo in un insieme di misura nulla (dimostrazione di Hardy).

Poincaré la definí “un oltraggio contro il buon senso” ed Hermite come “una piaga deplorabile”.

- In generale, in questa parte di programma, ci si focalizza sul calcolo di **integrali indefiniti** (quello che gli studenti spesso chiamano un po' impropriamente delle **antiderivate**, nonostante i docenti chiamino quest'ultime **primitive**).
- Di seguito, dopo aver descritto cosa sia un integrale definito, si introduce il **teorema fondamentale del calcolo integrale** (detto di Torricelli-Barrow) che permette facilmente di calcolare **molti integrali definiti**.
- Si deve sottolineare la parola **molti** perché di molte funzioni non si conoscono le *primitive in termini di funzioni elementari* e quindi il teorema del calcolo integrale trova difficoltà nell'essere utilizzato.

Tra le funzioni che non ammettono primitive in termini di **funzioni elementari**, citiamo:

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$g(x) = \exp(x^2)$$

- la funzione $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

In entrambi i casi dimostrazione non é elementare ed é un corollario di un **teorema di Liouville**.

Sono a disposizione vari ambienti per il **calcolo simbolico**, che permettono il calcolo di integrali indefiniti e la valutazione di integrali definiti.

Tra i piú noti citiamo in ordine alfabetico

- **Maple**, a pagamento e in parte utilizzabile con Matlab, offre [servizi online](#);
- **Mathematica**, a pagamento, ma offre [servizi online](#);
- **Maxima**, gratuito, con interessanti [demo online](#).

Cercheremo di utilizzarli per il calcolo di alcuni integrali.

- 1 Quale **primo esempio** prendo in considerazione un esempio che viene da un potenziale esercizio per studenti del liceo scientifico, ovvero il calcolo dell'integrale di una funzione razionale, che tipicamente viene svolto mediante la **decomposizione in frazioni parziali**

$$\int \frac{1+x-x^2}{1+x^2} dx = \frac{\log(x^2+1)}{2} - x + 2 \arctan(x) + C$$

Questa tecnica é stata scoperta nel 1702 da Johann Bernoulli e Gottfried Leibniz, in modo indipendente e di solito richiede un po' di calcoli.

- 2 Quale **secondo esempio** consideriamo il calcolo di una primitiva di $\exp(-x^2)$.

Di seguito per entrambe le integrande calcoleremo l'integrale definito in $[0, 1]$.

Svolgiamo i calcoli con Maple (dalla shell di Matlab), per integrali indefiniti.

```
>> syms x;  
>> int((1+x-x^2)/(1+x^2),x)  
  
ans =  
  
log(x^2 + 1)/2 - x + 2*atan(x)  
  
>> int(exp(-x^2))  
  
ans =  
  
(pi^(1/2)*erf(x))/2  
  
>> help erf  
erf Error function.  
Y = erf(X) is the error function for each element of X. X must be  
real. The error function is defined as:  
  
    erf(x) = 2/sqrt(pi) * integral from 0 to x of exp(-t^2) dt.  
  
See also erfc, erfcx, erfinv, erfcinv.  
  
Documentation for erf  
Other uses of erf  
  
>>
```

Figure: Integrali indefiniti in Maple (via shell Matlab).

Svolgiamo ora i calcoli con Maple (dalla shell di Matlab), per integrali definiti.

```
>> int((1+x-x^2)/(1+x^2),0,1)

ans =

pi/2 + log(2)/2 - 1

>> format long
>> pi/2 + log(2)/2 - 1
|
ans =

0.917369917074869

>> int(exp(-x^2),0,1)

ans =

(pi^(1/2)*erf(1))/2

>> (pi^(1/2)*erf(1))/2

ans =

0.746824132812427

>>
```

Figure: Integrali definiti in Maple (via shell Matlab).

Svolgiamo ora i calcoli con Mathematica per integrali indefiniti, andando ad esempio al sito [Online Integral Calculator](#). Per richiedere i calcoli si usi l'uguale a destra del campo di immissione.

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



$$\int \frac{(1+x-x^2)}{1+x^2} dx$$

NATURAL LANGUAGE $\int_0^{\pi}$ MATH INPUT

$\frac{\square}{\square}$ $\square^\square$ $\sqrt{\square}$ $\sqrt[n]{\square}$ $\frac{d}{d\square}$ $\frac{d^2}{d^2\square}$ $\int \square$ $\int_0^{\square}$ $\sum_{\square}^{\square}$ $\lim_{\square \rightarrow \square} \square$ $[a,b]$ $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

Indefinite integral ☒ Step-by-step solution

$$\int \frac{1+x-x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1) - x + 2 \tan^{-1}(x) + \text{constant}$$

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function
 $\log(x)$ is the natural logarithm

Plots of the integral  Enlarge  Data  Customize  Plain Text

Figure: Integrali indefiniti in Mathematica (via Online Integral Calculator).

Per quanto riguarda il secondo integrale, immettiamo la nuova integranda e digitiamo = a destra della box.

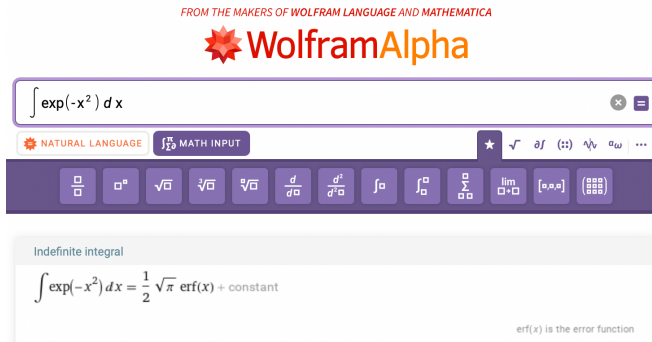


Figure: Integrali indefiniti in Mathematica (via Online Integral Calculator).

Per quanto riguarda gli integrali definiti, immettendo i dati in Math Input, come si evince facilmente dai menu' sotto il campo di immissione, cliccando su *more digits*:

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



$$\int_0^1 \frac{1+x-x^2}{1+x^2} dx$$

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

★ √ ∂ ∫ ∴ √ √ ∞ ...

Definite integral Fewer digits More digits ☒ Step-by-step solution

$$\int_0^1 \frac{1+x-x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (-2 + \pi + \log(2)) \approx 0.917369917074869$$

log(x) is the natural logarithm

Figure: Integrali definiti in Mathematica (via Online Integral Calculator).

Come prima, ma questa volta per la funzione gaussiana.

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



$\int_0^1 \exp(-x^2) dx$

NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

★ √ ∂f (:=) √ √ a ω ...

Definite integral Fewer digits More digits

$\int_0^1 \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1) \approx$
0.74682413281242702539946743613185300535449968681260632902765449895`
8605327561772831497848429822901920

erf(x) is the error function

Figure: Integrali definiti in Mathematica (via sito online).

Rifacciamo gli esperimenti con Maxima, utilizzando il [sito dimostrativo](#)

```
integrate((1+x-x^2)/(1+x^2), x);
```

Click Clear

```
(%i1) integrate((1+x-x^2)/(1+x^2), x);
```

(%o1) $\frac{\log(x^2+1)}{2} + 2 \arctan x - x$

Figure: Integrali indefiniti in Maxima (via sito online).

```
integrate(exp(-x^2), x);
```

```
(%i1) integrate(exp(-x^2), x);
```

```
(%o1) 
$$\frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

```

[Yamwi](#)

Figure: Integrali indefiniti in Mathematica (via Online Integral Calculator).

Maxima per il calcolo di integrali

integrate((1+x-x^2)/(1+x^2),x,0,1);

Clic

Clear

(%i1) integrate((1+x-x^2)/(1+x^2),x,0,1);

(%o1) $\frac{\log 2+\pi-2}{2}$

Figure: Integrali definiti in Maxima (via sito online).

```
integrate(exp(-x^2),x,0,1);
```

```
(%i1) integrate(exp(-x^2),x,0,1);
```

```
(%o1)  $\frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)}{2}$ 
```

Figure: Integrali definiti in Maxima (via sito online).

Nota.

L'installazione di Maxima su computers Apple é decisamente ostica.

Gli integrali indefiniti prima esposti, ovvero

$$\int_0^1 \frac{1+x-x^2}{1+x^2} dx \approx 0.917369917074869$$

$$\int_0^1 \exp(-x^2) dx \approx 0.746824132812427$$

possono anche essere approssimati in ambiente Matlab/Octave.

- Per semplicità li eseguiamo in [Octave](#), essendo tale software gratuito. La versione Matlab é identica.
- I comandi possono anche essere immessi nel sito [OctaveOnline](#) oppure [Compilatore online Octave \(MATLAB\)](#).

Mostriamo come in Matlab/Octave possiamo calcolare un integrale definito mediante un algoritmo adattativo via la routine **integral**, con un errore assoluto e/o relativo fissato dall'utente. Questo e' garantito numericamente ma non matematicamente (con esempi complicati si può far fallire il codice adattativo).

La definizione della integranda richiede un po' di dimestichezza col comando **"."** di Matlab/Octave.

```
>> f=@(x) (1+x-x.^2)./(1+x.^2);  
>> Q = integral (f,0,1,'AbsTol',10^(-12),'RelTol',10^(-12));  
>> Q  
Q = 0.917369917074869  
>> g=@(x) exp(-x.^2);  
>> Q = integral (g,0,1,'AbsTol',10^(-12),'RelTol',10^(-12));  
>> Q  
Q = 0.746824132812427  
>> |
```

Figure: Integrali definiti in Octave (via programma gratuito).

Problema. (Interpolazione polinomiale)

Siano dati

- $n + 1$ punti $x_0, \dots, x_n$ a due a due distinti,
- i valori $y_0, \dots, y_n$

Il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel calcolare

$$p_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Esempio (Retta per due punti)

Dati 2 punti distinti x_0, x_1 e i valori y_0, y_1 , determinare $p_1 \in \mathbb{P}_1$ tale che

$$p_1(x_0) = y_0, \quad p_1(x_1) = y_1 \tag{1}$$

ovvero la retta che passa per le coppie (x_0, y_0) , (x_1, y_1) .

Esistenza e unicità del polinomio interpolatore

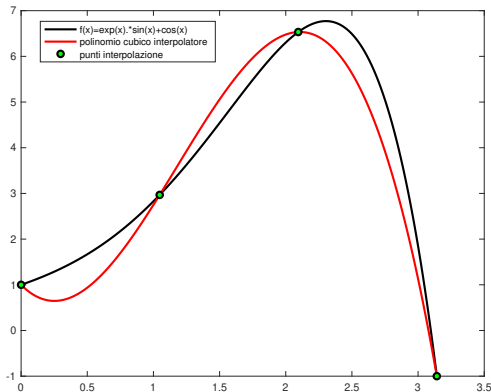


Figure: Esempio di interpolazione della funzione $f(x) = \exp(x)\sin(x) + \cos(x)$ (in nero) mediante un polinomio di grado 3 (in rosso) in 4 punti equispaziati di $[0, \pi]$ (cerchietti in verde). Sono stati esposti i grafici delle funzioni e le coppie $\{(x_k, y_k)\}_{k=0, \dots, 3}$, ove $x_k = k\pi/3$ e $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, 3$.

Teorema (Esistenza e unicità del polinomio interpolatore)

Dati $n + 1$ punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n$ e i valori $y_0, y_1, \dots, y_n$, esiste ed è unico il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Inoltre

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

dove

$$L_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

è il k -simo polinomio di Lagrange, relativamente ai punti $\{x_k\}_{k=0, \dots, n}$.

I polinomi di Lagrange furono scoperti da

- Waring in Problems concerning interpolations nel 1779,
- riscoperti da Eulero nel 1783,
- finalmente pubblicati da Lagrange in Leçon Cinquième. Sur l'usage des courbes dans la solution des problèmes nel 1795 (volume 7, p.286).

Per una interessante nota storica, si veda A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing.

[59]

VII. *Problems concerning Interpolations.* By Edward Waring, M. D. F. R. S. and of the *Institute* of Bononia, *Lucasian Professor of Mathematics in the University* of Cambridge.

Read Jan. 9, 1779. MR. BRIGGS was the first person, I believe, that invented a method of differences for interpolating logarithms at small intervals from each other: his principles were followed by REGINALD and MOVTON in France. Sir ISAAC NEWTON, from the same principles, discovered a general and elegant solution of the abovementioned problem: perhaps a still more elegant one on some accounts has been since discovered by MEFF. NICHOLE and STIRLING. In the following theorems the same problem is resolved and rendered somewhat more general, without having any recourse to finding the successive differences.

THEOREM I.

Affume an equation $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + x^{n-1} = y$, in which the co-efficients a, b, c, d, e , &c. are invariable; let

66

Dr. WARING on *Interpolations.*

$$B = \frac{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}, \quad C = \frac{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$$

$$D = \frac{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}, \quad E = \frac{\frac{x-a}{\epsilon-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\epsilon} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\epsilon-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\epsilon} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$$

&c.: substitute these values for A, B, C, D, E , &c. respectively in the preceding equations $(A+B+C+D+E+\&c.) = I$, $A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\epsilon + \&c. = x$, $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 + E\epsilon^2 + \&c. = x^2$, $A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\epsilon^3 + \&c. = x^3$, &c.)

and there reful the equations (1) $\frac{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$

$$+ \frac{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}, \quad \&c. = 1;$$

$$(2) \alpha \times \frac{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} + \beta \times \frac{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} + \gamma \times \frac{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} + \&c. = x;$$

$$(3) \alpha^2 \times \frac{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} + \beta^2 \times \frac{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$$

$$+ \gamma^2 \times \frac{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} = x^2; \text{ and in general,}$$

$$\alpha^m \times \frac{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\beta-a} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\beta} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}} + \beta^m \times \frac{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\gamma-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\delta}{\delta-\gamma} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$$

$$+ \gamma^m \times \frac{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}}{\frac{x-a}{\delta-a} \times \frac{x-\beta}{\beta-\gamma} \times \frac{x-\gamma}{\gamma-\delta} \times \frac{x-\epsilon}{\epsilon-\delta} \times \frac{x-\zeta}{\zeta-\delta}},$$

$$+ \&c. = x^m; \text{ whatever may be the values of the quantities}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c.: reduce all these fractions into terms, proceeding according to the dimensions of the quantity x , and it is evident, that the sum of all the fractions multiplied

Figure: Articolo di Waring in cui sono introdotti i polinomi di Lagrange.

DE EXIMIO VSV
METHODI INTERPOLATIONVM
IN SERIERVM DOCTRINA.

In methodo interpolationum eiusmodi relatio inter binas variables x et y quaeritur, ut si alteri x successively dati valores a, b, c, d , etc. tribuantur, altera y inde quoque datos valores p, q, r, s , etc. sortiat; seu quod eodem redit, aequatio pro eiusmodi linea curva quaeritur, quae per quotcunque puncta data transeat. Quo maior ergo fuerit horum punctorum numerus, eo magis linea curva limitatur: interim tamen iam alla occasione observavi, etiamsi punctorum numerus in infinitum augeatur, curvam per ea transeantem non prorsus determinari, sed semper infinitas adhuc lineas curvas exhiberi posse, quae aequae per cuncta eadem puncta sint transiturae. Quare cum methodus interpolationum pro quovis casu lineam curvam suppeditet determinatam, solutio haec semper pro maxime particulari erit habenda: verum haec ipsa circumstantia singularem quandam indolem solutionis invenias innuit, quae accuratorem considerationem meretur. Imprimis autem ista solutionis indoles pendet a ratione, qua interpolatio instituitur, seu a forma, quae aequationi generali tribuitur, in qua aequationem quaesitam contineri

V 3

opor-

Figure: Articolo di **Eulero** in cui sono riottiene un concetto prossimo ai polinomi di **Lagrange**.

286

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

qu'en faisant $x = p$ on ait

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \dots;$$

que de même, en faisant $x = q$, on ait

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad \dots;$$

qu'en faisant $x = r$, on ait pareillement

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad \dots, \quad \text{etc.};$$

d'où il est facile de conclure que les valeurs de $A, B, C, \dots$ doivent être de cette forme

$$A = \frac{(x - q)(x - r)(x - s) \dots}{(p - q)(p - r)(p - s) \dots},$$

$$B = \frac{(x - p)(x - r)(x - s) \dots}{(q - p)(q - r)(q - s) \dots},$$

$$C = \frac{(x - p)(x - q)(x - s) \dots}{(r - p)(r - q)(r - s) \dots},$$

$$\dots\dots\dots,$$

Figure: Opera di Lagrange in cui sono introdotti i polinomi che portano il suo nome.

Viene da credere che se quali punti prendiamo **nodì equispaziati** nell'intervallo $[a, b]$, ovvero

$$x_k = a + k \frac{(b - a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

al crescere di n il polinomio p_n tende ad approssimare sempre meglio la funzione, ma non é cosí.

Esiste un famoso controesempio dovuto a Runge in [Über die Darstellung willkrlicher Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten](#), p.243, (1901), ovvero la funzione $f \in C^\infty([-5, 5])$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

in cui **al crescere di n , $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)|$ non converge a 0.**

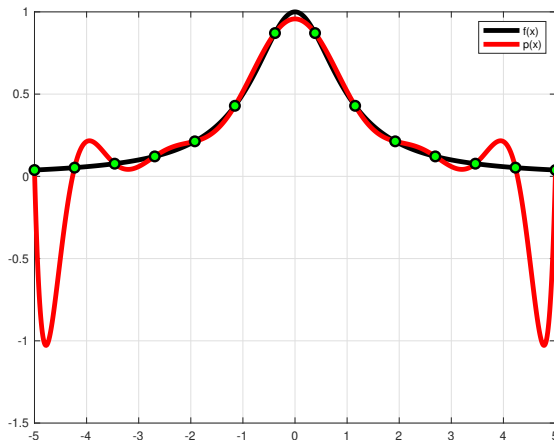


Figure: Grafico che illustra il polinomio interpolante di grado 12 su 13 nodi equispaziati della funzione di Runge. In rosso il polinomio interpolatore, in nero la funzione di Runge, i pallini verdi sono le coppie da interpolare. Si notino le forti differenze agli estremi. Al crescere del grado le cose non vanno meglio!

Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten.

Von C. RUNGE in Hannover.

Die Abhängigkeit zwischen zwei messbaren Grössen kann, streng genommen, durch Beobachtung überhaupt nicht gefunden werden. Denn selbst wenn man von den Beobachtungsfehlern absehen und die Beobachtungen als absolut genau voraussetzen wollte, so bliebe doch immer der Umstand, dass durch Beobachtung immer nur eine diskrete Reihe einander entsprechender Wertepaare der beiden Grössen gefunden werden könnte. Selbst wenn wir die Reihe als unendlich voraussetzen, so würde nicht einmal eine „analytische“¹⁾ Funktion dadurch bestimmt sein. Gesetzt z. B., es seien für eine unendliche Reihe von äquidistanten Werten der einen Grösse die Werte der andern Grösse absolut genau bekannt, so wäre das Abhängigkeitsverhältnis damit noch nicht gegeben, selbst dann nicht, wenn wir nur nach der „analytischen“ Funktion fragen, die das Abhängigkeitsverhältnis darstellen soll. Denn es ist klar, dass man auf mannigfache Weise eine periodische Funktion bilden kann, die für alle jene äquidistanten Werte verschwindet und daher, zu einer Funktion addiert, ihre Werte an jenen Stellen nicht ändert. Dennoch betrachtet man in den beobachtenden Wissenschaften eine Funktion durch eine solche Tabelle ihrer Werte als wohl definiert, sobald die Argumente nur hinreichend nahe aneinander liegen. Wie dicht sie liegen müssen, darüber werden meines Wissens klare Kriterien nicht aufgestellt. Man beschränkt sich darauf zu verlangen, dass die beobachteten Werte graphisch aufgetragen eine „glatte Kurve“ geben. Eine Wellenlinie, die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden beobachteten Punkten ein Maximum oder Minimum hätte, würde man stillschweigend ausschliessen.

Dieses übliche Verfahren kann in der That auch mathematisch gerechtfertigt werden.

Man kann nämlich auch durch eine Tabelle eine Funktion wohl definieren, wenn man zugleich ein Interpolationsverfahren vorschreibt.

1) Im Sinne von Weierstrass.

VON C. RUNGE.

243

Es sei z. B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $a = -5$, $b = +5$. Dann hat $f(x)$ die beiden singulären Stellen $+i$ und $-i$. Statt eines Kreises haben wir dann zwei Kreise auszuschliessen und erhalten, wenn wir die U -Kurve ins Unendliche rücken lassen

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) + \frac{i}{2} \frac{g_n(x)}{g_n(i)} \frac{1}{i-x} + \frac{i}{2} \frac{g_n(x)}{g_n(-i)} \frac{1}{-i-x}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (i-x_1)(i-x_n) &= -(x_1^2+1) \\ (i-x_n)(i-x_{n-1}) &= -(x_{n-1}^2+1). \end{aligned}$$

u. s. w.

Wird daher n als ungrade vorausgesetzt, so muss $g_n(i)$ rein imaginär sein:

$$\begin{aligned} g_n(i) &= \pm i |g_n(i)| \\ g_n(-i) &= \mp i |g_n(i)| \end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) \pm \frac{g_n(x)}{|g_n(i)|} \frac{x}{1+x^2}.$$

Figure: Articolo sul fenomeno di Runge.

Vale il seguente teorema di facile dimostrazione.

Teorema (Stabilità integrazione)

Se $\tilde{f}, f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo limitato, allora

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \tilde{f}(x) dx \right| \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

Quindi se supponiamo

- che i punti $\{x_k\}_{k=0, \dots, n} \subset [a, b]$ siano a due a due distinti,
- di sapere che il polinomio $\tilde{f} = p_n$ interpolante le coppie $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ sia una *buona* approssimazione di $f \in C([a, b])$.

allora pure

$$I(p_n) = \int_a^b p_n(x) dx \approx I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

con l'indubbio vantaggio che il calcolo di $I(p_n)$ risulta usualmente più semplice in generale di quello di $I(f)$.

Regole di quadratura interpolatoria

In virtù di quanto appena visto, indicato con L_k i polinomi di Lagrange relativamente ai punti $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$, allora definiti i **pesi**

$$w_k = \int_a^b L_k(x) dx$$

ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^b f(x_k) L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n w_k f(x_k). \end{aligned} \tag{2}$$

ovvero

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k).$$

Regole di quadratura interpolatoria

Notiamo che se $f \in \mathbb{P}_n$ allora essa **corrisponde** col polinomio p_n **interpolante** le coppie $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$ (cf. teorema di esistenza e unicità del polinomio interpolatore) e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx = \dots = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k).$$

Di conseguenza, per $f \in \mathbb{P}_n$ il risultato della formula di quadratura $\sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$ é esattamente uguale al calcolo di $\int_a^b f(x) dx$.

In linguaggio matematico si dice che **il grado di esattezza di una regola interpolatoria basata su $n + 1$ nodi é almeno n .**

Quindi, una regola interpolatoria basata su

- 1 nodo, sicuramente integra esattamente le costanti;
- 2 nodi, sicuramente integra esattamente i polinomi di grado 0 e 1;
- 3 nodi, sicuramente integra esattamente i polinomi di grado 0, 1 e 2.

Vedremo che in qualche caso le cose **vanno anche meglio di così.**

Il fatto che

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k), \quad w_k = \int_a^b L_k(x) dx$$

dice che per approssimare l'integrale richiesto, non serve

- 1 calcolare il polinomio interpolatore (costoso!),
- 2 calcolare il suo integrale indefinito,
- 3 applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale,

bensì

- 1 calcolare una volta per tutte i pesi $\{w_k\}_{k=0,\dots,n}$ relativi all'insieme dei **nod**i $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$,
- 2 sfruttare direttamente le valutazioni $\{f(x_k)\}_{k=0,\dots,n}$.

Nota.

Quanto detto é importante, perché se cambiamo integranda, i calcoli da fare per ottenere sono pochi, perché i pesi w_k , $k = 0, \dots, n$ non cambiano visto che dipendono dai polinomi di Lagrange e quindi solo dai nodi!

Definizione (Regola del rettangolo)

Siano

- $f \in C([a, b]), -\infty < a < b < +\infty,$
- $x_0 \in [a, b].$

La regola detta del **rettangolo** è definita da

$$\int_a^b f(x) dx \approx w_0 f(x_0) = (b - a) f(x_0) := S_0^*(f). \quad (3)$$

Nel caso in cui $x_0 = \frac{a+b}{2}$ abbiamo la cosiddetta **regola del punto medio**.

Per la regola del punto medio vale la seguente stima d'errore

Teorema (Errore della regola del punto medio)

Se $f \in C^{(2)}([a, b])$ l'errore della regola del punto medio risulta

$$E_0(f) := I(f) - S_0^*(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Una lettura attenta dice che se $f \in \mathbb{P}_1$ allora

$$E_0(f) := I(f) - S_0^*(f) = 0$$

e quindi l'integrale e la formula del punto medio porgono lo stesso risultato.

Ad un occhio attento questo fatto é un po' sorprendente perché ci si aspetta che la regola integri bene le costanti ma non anche i polinomi di grado 1.

Regola del rettangolo

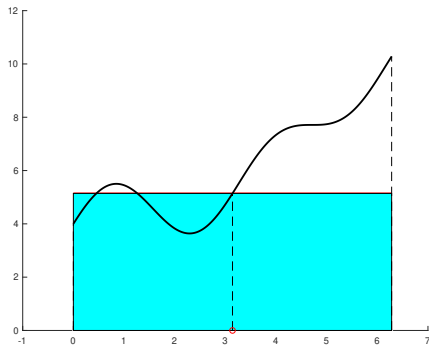


Figure: Regola del rettangolo con nodo $x_0 = (a + b)/2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, per il calcolo di $\int_0^{2\pi} (3 + \sin(2x) + \cos(x) + x) dx$ (la regola calcola l'area del rettangolo in celeste).

Definizione (Regola del trapezio)

La regola del trapezio è definita da

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_1(f) := \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)).$$

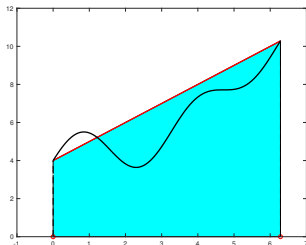


Figure: Regola del trapezio per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$
(la regola calcola il volume dell'area in celeste).

Teorema (Errore della regola del trapezio)

Se $f \in C^2([a, b])$ allora l'errore compiuto dalla formula del trapezio è

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Teorema (Grado di precisione della regola dei trapezi)

*Il grado di precisione della regola del trapezio è esattamente **1**.*

Definizione (Regola di Cavalieri-Simpson)

La regola di Cavalieri-Simpson è definita da $\int_a^b f(x)dx \approx S_2(f)$ con

$$S_2(f) := \frac{b-a}{6} \cdot f(a) + \frac{2(b-a)}{3} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} \cdot f(b).$$

Tale formula interpolatoria corrisponde a integrare il polinomio interpolatore avente quali nodi i punti a , b e il punto medio dell'intervallo $(a+b)/2$.

Di conseguenza, essendo a tre punti, ha grado di precisione almeno 2.

Regola di Cavalieri-Simpson (o della parabola)

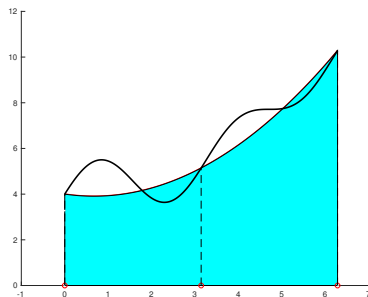


Figure: Regola di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ calcola l'area del trapezio in celeste).

Regola di Cavalieri-Simpson (o della parabola)

Teorema (Errore Regola Cavalieri-Simpson)

Se $f \in C^4([a, b])$ allora l'errore compiuto dalla regola di Cavalieri-Simpson è

$$E_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

in cui $\xi \in (a, b)$.

Teorema (Grado di precisione della regola di Cavalieri-Simpson)

Il grado di esattezza della regola di Cavalieri-Simpson è esattamente 3.

Nota.

Come nel caso della regola del punto medio, questo è sorprendente, perché essendo la formula basata sull'interpolazione in 3 punti, ci si aspetta possa non essere in grado di integrare polinomi di terzo grado.

Storicamente lo studio degli integrali ha seguito una strada un po' contorta.

Si pensi che Cavalieri non aveva il concetto odierno di integrale, essendo stato attivo come ricercatore tra il 1629 e il 1647, mentre

- il teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli-Barrow) appare in qualche forma primitiva in *Lectiones geometricae* di Barrow (1670) e una qualche prova in *Geometriae pars universalis* di Gregory (1668), cf. [1];
- l'integrale di Riemann fu introdotto nel dicembre del 1853 (nella sua tesi di abilitazione);
- l'integrale di Lebesgue fu introdotto nel 1904;

In qualche modo, senza avere la teoria moderna, ma utilizzando una tecnica detta *Il metodo degli indivisibili*, Cavalieri fu in grado di calcolare per $n = 1, \dots, 9$ quello che ora scriviamo $\int_a^b x^n dx$.

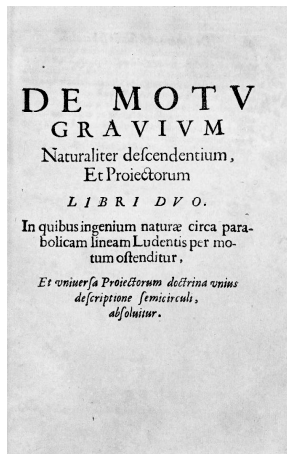
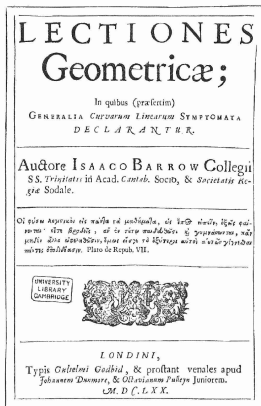


Figure: Opera di **Torricelli** in cui é introdotto in forma geometrica il teorema fondamentale del calcolo (legame tra spazio percorso su una linea retta e velocità).



LECTURE XI

Change of the independent variable in integration. Integration the inverse of differentiation. Differentiation of a quotient. Area and centre of gravity of a paraboliform. Limits for the arc of a circle and a hyperbola. Estimation of π .

NOTE

In the following theorems, Barrow uses his variation of the usual method of summation for the determination of an area. If $ABKJ$ is the area under the curve Ad , he divides BK into an infinite number of equal parts and erects ordinates. In his figures he generally makes four parts do duty for the infinite number.

He then uses the notation already mentioned, namely, that the area $ABKJ$ is equal to the sum of the ordinates AB , CD , EF , GH , JK .

The same idea is involved when he speaks of the sum of the rectangles $CD DB$, $EF FD$, $GH FH$, $JK KH$; for this sum, where commas are used between the quantities instead of a plus sign, does not stand for the area $ABKJ$, but for $R \cdot A'BKJ'$, where an ordinate HG' is such that $R \cdot HG' = HG \cdot FH$, and R is some given length; in other words, ordinates proportional to each of the rectangles are applied to points of the line BK , and their aggregate or sum is found; hence this sum is of three dimensions. On the contrary, he uses the same phrase, with plus signs instead of commas, to stand for a simple summation.



Figure: Opera di Barrow in cui é introdotto in forma geometrica il teorema fondamentale del calcolo, e nota moderna di Child sul suo contenuto. Interessante anche la nota Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of the calculus.

GEOMETRIÆ
PARS VNIVERSALIS.
Interviens
Quantitatum Curvarum transmutationi & mensuræ.
AVTHORE
IACOBO GREGORIO
ABREDONENSI
SCOTO.



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis Heredum Pauli Frambotti, *Superiorum Perm.*
CVM PRIVILEGIO.



Figure: *Geometriae pars universalis*, pubblicato a Padova nel 1668.

Alla pagina web [Riemann integral](#) troviamo scritta questa nota interessante:

The Riemann integral was introduced in Bernhard Riemann's paper "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (On the representability of a function by a trigonometric series; i.e., when can a function be represented by a trigonometric series).

This paper was submitted to the University of Göttingen in 1854 as Riemann's Habilitationsschrift (qualification to become an instructor).

It was published in 1868 in Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Proceedings of the Royal Philosophical Society at Göttingen), vol. 13, pages 87-132.

For Riemann's definition of his integral, see section 4, "Über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit" (On the concept of a definite integral and the extent of its validity), pages 101-103.



Figure: La monografia in cui venne introdotto l'integrale di Riemann.

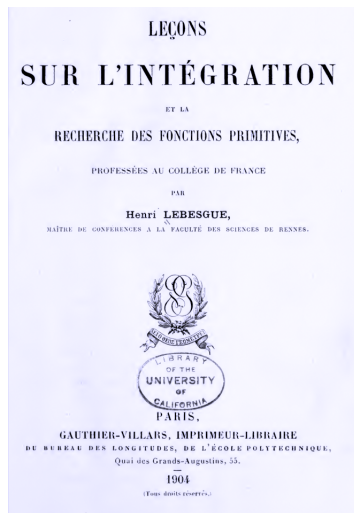


Figure: La monografia in cui venne introdotto l'integrale di Lebesgue.

Regola di Cavalieri-Simpson (o della parabola)

Sull'attribuzione a Cavalieri, scrive Peano in [Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson](#) (1916), in un anomalo interlingua, attribuendo la formula a contributi di [Cavalieri](#) (1639), [Gregory](#) (1668), [Cotes](#) (1722) e Simpson (1743).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

donc la figure 1, dont la figure 2 est une projection oblique. En joignant PQ' et QP' nous obtenons le point S ; la droite $A'S$ passe¹ par le point inaccessible A .

La projection centrale de la figure 1 sur un ablique à celle-ci (fig. 2) donne la construction proposée par M. d'Ocagne. Son tracé consiste à mener par A' deux droites quelconques [projection des parallèles par A' dans la fig. 1]; par les points d'intersection J et J' nous menons deux droites quelconques [projection des parallèles auxiliaires par P et Q dans la fig. 1] sur lesquelles on a deux ponctuelles homographiques déterminées par les trois couples de points JJ' , $Q'P'$ et QP . La droite $A'A'$ n'étant autre chose que l'axe perspectif des deux ponctuelles, nous obtenons un point quelconque de l'axe en joignant convenablement les points des deux supports, ici PQ' et QP' . Le point d'intersection S est un point de la droite cherchée.

Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson:

Nota de G. Prato (Torino.)

NOTE DE LA RÉDACTION. — Sur la demande de M. G. Peano, professeur d'Analyse à l'Université de Turin et président de l'Accademia pro Interlingua, nous reproduisons, à titre de spécimen, une note rédigée dans la langue auxiliaire internationale Interlingua.

Formula de quadratura que nos considera es:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

que es vero, si functione f es integro, de gradu non superiore

¹ Indiquons en passant une construction très simple des points de la droite AA' qui n'a été donnée telle que: Si l'on mène une parallèle quelconque à BB' , qui coupe $A'B$ en C et $A'B'$ en C' et qu'on complète le triangle $A'C'C'$ en un parallélogramme ayant CC' comme diagonale le sommet opposé à A' peut servir à déterminer la droite AA' .

³ Uncti vocabulo es latine: la, de, aza, et; nomen habet forma de Uctus, id est: rariolus, feruile, grana, integre (ablatiu), non immixtum, cum lex antiquior.

«Academii pro Interlingua» habet origines la 1887, et adopta Volsky publicato in 1908, etale Esperanto publicato in 1907; in 1909 publico «Idiom natural» constructo super principio de internationalitate maximo; et continua libere pro Lingua internationali.

Actuali presento, trovo me «ATHI RI. Ann. di Torino, 20, 1913» et, ex scripto in «Limes, sine fascione», uno ex numero forma de Interlingua, intelligibile sine studio al lingua publica.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCES

12

ad 3; et pro alio functiones, ea de usu frequente, ut formula de approximatione.

Ce formula occorre sub forma geometrico, in
B. CAVALIERI, *Centuria di varii problemi*. Bologna e 1639 n. 110.

J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*. Londini anno 1668.

R. COTES, *Harmonia mensurarum*, Catabrigie, anno 1722, p. 33, et in fine in

TH. SIMPSON, *Mathematical dissertations*, London, 1743, p. 109.
 Résumé de sa note : « formule di Simpson ».

Me adde nomine de primo auctore.

Praxi proba quod formula de Cavalieri-Simpson, es in generale satis approximato. Ergo plure auctore desidera de cognosce uno limite de errore in isto approximatione.

In libro: *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, Torino, Bocca, 1887, pag. 208, me publica espressione de residuo, id es de differentia inter primo et secundo membro sub forma:

$$= -\frac{(b-a)^2}{4|b-a|} D^4 f(x)$$

ubi x è un valore medio inter a e b .

Idem risultato: es pubblicato ab Markov, in libro edito in S. Petersburg, 1889; et versione cum titulo: MARKOFF, *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Un caso particolare della regola esposto in mio scripto: Resta nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito. « Rendiconti Acc. Lincei », 4 maggio 1913, ibi me da espressione dei residui in formula di Cavalieri-Simpson, sub forma di integrale.

In presente scripto, me perveni ad idem resultatu, per via plus
directo et plus elementare.

Terciano: Pro haue capacitate de vasa vinaris, nos multiplico tertio parte de longitudine vasa per duo circulo maiores et uno minores.

Si non siano assi di vane pro-axi di x , e pro-origines pencils medio, si longitudines de vane
 es k , et si $\gamma(x)$ es area de sectione de vane, in puncto de abscissa x , et normale ad axi, tunc
 A12

velocidade = $\int f(x) dx$; círculo externo = $f(0)$; círculo interno = $f(1/2) = f(0) - h(0)$; e, por
meio de Cavalieri, que esse integral vale

$$\frac{\lambda}{2} [f'(x) + f(x)] = \frac{\lambda}{2} [f'(x) + f(x-1) + f(x+1)]$$

Risulta sorprendente a cosa servisse a Cavalieri una tale formula.

All'epoca studiavano molto i solidi di rotazione. Per esempio, **Keplero** in *Nova stereometria doliorum vinariorum* ovvero *Nuova misura del volume delle botti di vino* cercò di giustificare un **criterio empirico usato dai bottai austriaci**. Utilizzò metodi geometrici per provvedere allo scopo.

D'altra parte pare che anche **Cavalieri** fosse interessato a questo. In *Note - Postille Matematiche* di Gabrio Piola, si parla del lavoro di Cavalieri *Centuria di varii problemi*. In particolare a pagina 83, si dice

Il problema 80 per la misura delle botti ellittico-circolari, dove si dà una regola la quale é precisamente la medesima che oggidì si cava dalla nota formola del Rossi-Amulis dimostrata mediante il calcolo nel 1806.

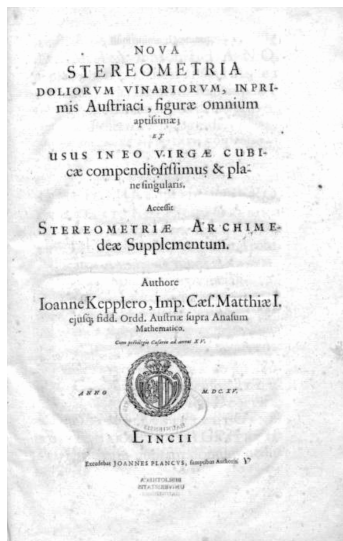


Figure: Copertina della pubblicazione di Keplero intitolata *Nova stereometria doliiorum vinariorum* sul volume delle botti.

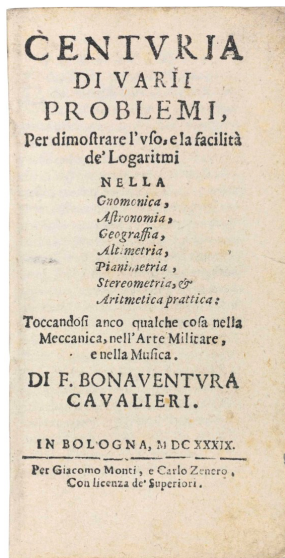


Figure: La copertina della pubblicazione di Cavalieri, suggerita da Peano.

¹ Phrasi de Cavalieri es: « Per havere la capacità della botte moltiplicheremo la terza parte della lunghezza della botte in due cerchi maggiori ed uno dei minori ».

Versione « Pro habere capacitatem de vase vinario, nos multiplicamus terciam partem de longitudine de vase per duo circulos maiores et uno minorem ».

Si nos sumamus axem de vase pro axi de x , et pro origine punctum medium, si longitudinem de vase es h , et si $f(x)$ es area de sectione de vase, in puncto de abscissa x , et normale ad axem, tunc

volumine $= \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx$; circulo maggiore $= f(0)$, circulo minore $= f(h/2) = f(-h/2)$; et re-

gula de Cavalieri dic que integrale vale:

$$\frac{h}{3} [2f(0) + f(h/2)] = \frac{h}{6} [4f(0) + f(-h/2) + f(h/2)] .$$

Figure: Nota di Peano sul volume delle botti di Cavalieri.

1948. In *Vino Veritas*:—"Si adunque moltiplicaremo la terza parte di IM lunghezza della Botte $BDFH$ in due cerchi maggiore CG e uno de minore BH , DF come in BH , ci verrà la capacità di detta Botte." F. B. Cavalieri, *Una centuria di varii Problemi nella Prattica Astrologica*, (Bologna, 1639), Problema 80. [Per Dr. G. N. Watson. It was probably this formula for the capacity of a cask of wine which suggested to James Gregory (who spent the years 1665–8 in Padua) the more general formula for approximate integration, often written in the form

$$\int_0^{2h} y \, dx = h(y_0 + 4y_1 + y_2)/3,$$

which, in its turn, led to the outstanding generalisations due to Newton and Cotes, and subsequently to the minor generalisation known as 'Simpson's rule'; about this rule (published in 1743) there is not much to be said except that it is more accurate than the 'trapezoidal rule'] [Per Dr. G. N. Watson]

Figure: Nota ulteriore sul volume delle botti di Cavalieri.

Problema 79. 445

quello, che dimostra Archim. ne Lib. de Sphæra, & Cylindro, perciò basterà misurare il cerchio di, BA, semidiametro, cioè giungeremo insieme il log. del cerchio della Tavoletta del prob. 66 che è 0,49715. con il doppio del log. di, BA, cioè con il log. di, EA, 130103. e di, AI, 060206. (perche, EA, AB, AI, sono proporzionali) e ne verrà il logar. 240024. di p. 251.33. e tanto sarà la superficie di detta porzione di sfera. La scio poi l'Essempio per la solidità della porzione dello sferoide, non essendo dissimile l'operazione da quella della sfera.

PROBLEMA 80.

Misurare la capacità delle Botti.

Sia di nuovo posta quā la figura del prob. ant. nella quale siano le due porzioni, ABH, D EF, li cui assi, AI, ME, siano eguali, onde trā le basi di quelle, cioè trā li cerchi, BH, DF, che faranno eguali, resti compreso il corpo,

446 Della Centuria

po, o Botte, BDFH, e per, L, centro pass, CG, diametro del cerchio maggiore, C G, perpendicolare ad, AE.

Per hauere adunque la capacità della Botte, BDFH, si potrà misurare mediante gli assi, AE, CG, tutto lo sferoide, ACEG, per il prob. 77. e poi per il prob. ant. le due porzioni, BAH, DEF, le quali sottratte dallo sferoide, ACEG, ci lasceranno la capacità della Botte, BDFH, ma perche questa è troppo lunga fattura, perciò ci potremo seruire di questi altri modi, come più facili.

Se adunque moltiplicheremo la terza parte di, IM, lunghezza della Botte, BDFH, in due cerchi maggiori, CG, & vno de minori, BH, DF, come in, BH, ci verrà la capacità di detta Botte. E poi quadreremo il cerchio di, CG, moltiplicando, CG, in se stesso,



Problema 80. 447

so, e poi moltiplicando il prodotto di nuovo per 7854. e partendo l'aumento per 10000 (che sono li termini della proporzione del quadrato al cerchio inscritto) poiche il quoziente sarà il cerchio, CG, e così ancora quadreremo il cerchio, BH, e poi moltiplicheremo il terzo di, IM, nelli due cerchi, CG, & vno, BH, e ne verrà la capacità della Botte, BDFH.

E per i log. giungendo insieme il log. della terza parte di, IM, cō il log. del cerchio, CG, cioè con il log. del cerchio della Tavoletta del prob. 66. che è 0,49715. e con il log. duplicato di, CL, e con il log. del Binario, ne verrà il log. di vn primo inuento. Dipoi giungendo parimente insieme il log. della terza parte di, IM, con il log. del cerchio, BH, cioè con il log. del cerchio della Taur. del Prob. 66. e con il log. duplicato di, BL, ne verrà il log. di vn secondo inuento, il quale giunto al primo ci darà la capacità della Botte, BDFH.

ES-

Lan stessa regola di quadratura si trova in [Mathematical dissertations On A Variety of Physical and Analytical subjects](#) di Thomas Simpson. Guardando la figura, T. Simpson pensa probabilmente a formula composte.

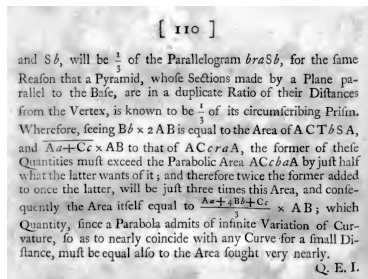
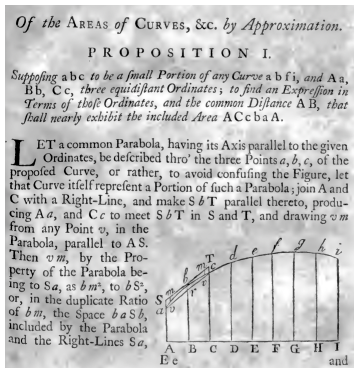


Figure: Dal testo di Simpson *Mathematical dissertations On A Variety of Physical and Analytical subjects*.

Considerazione.

Si supponga che l'integranda $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ limitato.

Per un teorema di Weierstrass, visto che una tale funzione é approssimabile uniformemente arbitrariamente bene da polinomi, hanno fatto credere istintivamente che formule aventi grado di esattezza sempre piú alto permettano di approssimare arbitrariamente bene l'integrale definito, ma cosí non é in generale.

Che in effetti sia cosí, viene da credere sia una conseguenza del controesempio di Runge. Una scelta cattiva dei nodi di integrazione $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$ porta a volta a volta a risultati catastrofici.

Vediamo di seguito i dettagli.

Definizione (Regole di Newton-Cotes chiuse, (Newton 1676, Cotes 1722))

Sia $[a, b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Una regola

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

*si dice di tipo **Newton-Cotes chiusa** se*

- *i nodi sono equispaziati, e comprendono gli estremi, cioè*

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

- *i pesi sono*

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}.$$

Nota. (Grado di precisione Formule di Newton-Cotes chiuse)

Tale formula è interpolatoria a $n+1$ punti (attenzione alla sommatoria) e ha grado di precisione almeno n .

Nota. (Facoltativa)

- Queste formule furono introdotte da Newton nel 1676, e descritte in *Of Quadrature by Ordinates* nel 1695. La letteratura non é molto chiara, dicono che calcoló formule a 5 ordinate (grado 4?).
- Furono di seguito perfezionate da Cotes, che era editore della seconda edizione dei Principia di Newton, probabilmente nel 1707 ma pubblicate nel 1722, che le calcoló fino a quelle con 11 nodi.

Guardando *Harmonia mensurarum*, non é facile capire dove si trovino tali formule dovute a Cotes. Viene citato un opuscolo aggiuntivo, ma non é chiaro il riferimento.

Cotes pare non sia stato citato o pagato per il lavoro nei Principia. Ciò nonostante era molto stimato da Newton, che alla morte di Cotes a 34 anni disse *If he had lived, we might have known something.*

HARMONIA MENSURARUM,

SIVE

ANALYSIS & SYNTHESIS

Per RATIONUM & ANGULORUM MENSURAS

P R O M O T Æ:

ACCEDUNT ALIA

OPUSCULA MATHEMATICA:

PER

ROGERUM COTESIUM.

————— *Si propius fies,*
Te capient magis. —————

EDIDIT ET AUXIT

ROBERTUS SMITH

Collegii S. Trinitatis apud Cantabrigienses Socius;

Astronomiæ & Experimentalis Philosophiæ

Post COTESIUM Professor.

CANTABRIGIÆ, MDCCXXII.

Mostriamo sull'esempio di Runge il fenomeno di mancata convergenza.

L'interpolante polinomiale in nodi equispaziati è molto diversa dalla funzione in Runge e quindi viene da credere che lo siano pure gli integrali definiti.

n	<i>Integrale Intp. Pol.</i>	<i>Err.Assoluto</i>
1	$3.846153846153846e - 01$	$2.362e + 00$
2	$6.794871794871796e + 00$	$4.048e + 00$
3	$2.081447963800905e + 00$	$6.654e - 01$
4	$2.374005305039788e + 00$	$3.728e - 01$
5	$2.307692307692308e + 00$	$4.391e - 01$
6	$3.870448673470800e + 00$	$1.124e + 00$
7	$2.898994409748379e + 00$	$1.522e - 01$
8	$1.500488907127907e + 00$	$1.246e + 00$
9	$2.398617897841837e + 00$	$3.482e - 01$
10	$4.673300555653490e + 00$	$1.926e + 00$
15	$4.15558992699889e + 00$	$1.409e + 00$
20	$-2.684955208653064e + 01$	$2.960e + 01$

Table: Valore di $\int_{-5}^5 p_n(x)dx$ dove p_n è il polinomio interpolante la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$ in $n+1$ punti equispaziati di $[-5, 5]$. Al crescere di n i risultati non approssimano $\int_{-5}^5 1/(1+x^2)dx \approx 2.746801533890032$.

Formula composta del punto medio

Le formule composte sono ottenute integrando un interpolante polinomiale a tratti di grado fissato m .

A tal proposito

- suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in L intervalli equispaziati $[t_0, t_1], \dots, [t_{L-1}, t_L]$;
- definiamo nel generico subintervallo $[t_{k-1}, t_k]$ un insieme di $m+1$ punti equispaziati $x_{m(k-1)} < \dots < x_{mk}$ con $t_{k-1} = x_{m(k-1)}$ e $t_k = x_{mk}$;
- sia " s_m " un'interpolante polinomiale a tratti di grado locale fissato m , relativa alla suddivisione $[t_k, t_{(k+1)}]$, con $k = 0, \dots, L$, e alle coppie $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \dots, n = Lm$;
- supponiamo che $S_m(f, t_{k-1}, t_k)$ sia una formula interpolatoria di tipo Newton-Cotes chiusa, nell'intervallo $[t_{k-1}, t_k]$, avente $m+1$ nodi (quindi con grado di precisione almeno m).

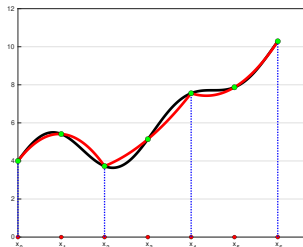


Figure: In nero: la funzione $f(x) = 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x$.

In rosso: la interpolante a tratti s_m di grado $m = 2$, relativa alla suddivisione $[t_k = x_{2k}, t_{k+1} = x_{2(k+1)}]$, con $k = 0, 1, 2$, e alle coppie $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \dots, n = 6$.

In verde: le coppie $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \dots, 6$.

- Essendo s_m un polinomio di grado m in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$,

- visto che ogni formula $S_m(f, t_k, t_{(k+1)})$ ha grado di precisione m , necessariamente, dalla proprietà di additività dell'operatore di integrazione:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b s_m(x) dx \\ &= \int_{t_0=a}^{t_1} s_m(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} s_m(x) dx + \dots + \int_{t_{L-1}}^{x_L=b} s_m(x) dx \\ &= S_m(f, t_0, t_1) + S_m(f, t_1, t_2) + \dots + S_m(f, t_{L-1}, t_L)\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto l'approssimazione dell'integrale non con una regola di Newton-Cotes con alto grado di precisione “ n ”, ma applicando una stessa regola con basso grado di precisione “ m ” in ogni subintervallo, sommando alla fine i contributi ottenuti.

Definizione (Formula composta)

Sia

- 1 $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato,
- 2 $t_j = a + jh$ con $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$,
- 3 $S(f, \alpha, \beta)$ una regola di quadratura nel generico intervallo limitato $[\alpha, \beta]$.

La formula di quadratura

$$S^{(c)}(f, a, b, N) = \sum_{j=0}^{N-1} S(f, t_j, t_{j+1}) \quad (4)$$

è detta formula composta di S .

Nota.

In questa discussione i punti x_j , $j = 0, \dots, N$, sono **equispaziati**, ma con qualche fatica si può effettuare nel caso generale di punti arbitrari. In altri termini:

- Se $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$, si partiziona l'intervallo $[a, b]$ come unione di subintervalli $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N - 1$;
- in ogni subintervallo si applica una formula di quadratura del grado desiderato.

Formula composta del punto medio

Definizione (Formula composta del punto medio)

La formula composta del punto medio è definita da

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k), \quad (5)$$

dove x_k è il punto medio del $k+1$ -simo subintervallo ovvero

$$x_k = a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{N}, k = 0, \dots, N-1.$$

(Determinazione della formula composta del punto medio, facoltativo)

Supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in N subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N-1$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$, $h = (b-a)/N$. Il punto medio x_k dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ risulta

$$x_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{a + kh + a + (k+1)h}{2} = a + \frac{(2k+1)h}{2}.$$

Visto $w_k = t_{k+1} - t_k = a + (k+1)h - (a + kh) = h = (b-a)/N$ otteniamo

$$S_0^{(c)}(f, a, b, N) := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f(x_k) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Formula composta del punto medio

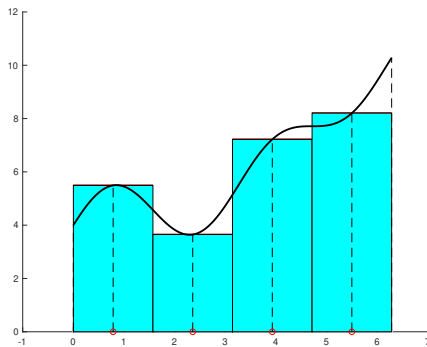


Figure: Formula del punto medio composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

Teorema (Errore formula composta punto medio)

Se $[a, b]$ è suddiviso in N subintervalli equispaziati di passo $h = \frac{b-a}{N}$, allora

$$E_0^{(c)}(f) := I(f) - S_0^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\xi^*), \quad \xi^* \in (a, b)$$

Nota. (Grado di precisione)

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la formula del punto medio, si vede facilmente che grado di precisione è esattamente 1.

Nota. (Errore formula vs regola)

Relativamente alla regola del punto medio avevamo

$$E_0(f) := I(f) - S_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

ma si osservi che per $N > 1$

$$\frac{(b-a)}{24} h^2 = \frac{(b-a)}{24} \left(\frac{b-a}{N} \right)^2 = \frac{(b-a)^3}{24N^2} < \frac{(b-a)^3}{24},$$

e quindi ci si può aspettare un errore migliore dalla formula di tipo composta.

Formula composta dei trapezi

Proposito. (Come si ottiene la formula dei trapezi composta)

Per introdurre la formula composta dei trapezi, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $K = 0, \dots, N - 1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$, $h = (b - a)/N = (b - a)/4$.

Indicata con $S_1(f, \alpha, \beta)$ l'applicazione della regola del trapezio relativamente a f e all'intervallo $[\alpha, \beta]$,

- $S_1(f, t_0, t_1) = \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1)),$
- $S_1(f, t_1, t_2) = \frac{h}{2}(f(t_1) + f(t_2)),$
- $S_1(f, t_2, t_3) = \frac{h}{2}(f(t_2) + f(t_3)),$
- $S_1(f, t_3, t_4) = \frac{h}{2}(f(t_3) + f(t_4)),$

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned} S_1^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{2}(f(t_0) + f(t_1) + f(t_1) + f(t_2) + f(t_2) + f(t_3) + f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{h}{2}(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + f(t_4)) \\ &= \frac{b-a}{N} \left(\frac{1}{2}f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \frac{1}{2}f(t_4) \right) \end{aligned}$$

Definizione (Formula dei trapezi composta)

Posti $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$, $h = (b - a)/N$, la formula **composta dei trapezi** è definita da

$$S_1^{(c)}(f, a, b, N) := \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right],$$

Teorema (Errore formula dei trapezi composta)

Nelle precedenti ipotesi, l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

Formula composta dei trapezi

Nota. (Grado di precisione)

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la regola del trapezio, si vede facilmente che grado di precisione è esattamente 1, visto che l'errore assoluto risulta

$$|E_1^{(c)}(f)| := |I(f) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)| = \frac{(b-a)}{12} h^2 |f^{(2)}(\xi)|, \quad h = \frac{(b-a)}{N},$$

Nota. (Formula composta vs regola)

Relativamente alla regola del trapezio avevamo

$$|E_1(f)| := |I(f) - S_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12} |f^{(2)}(\xi)|, \quad \xi \in (a, b).$$

ma si osservi che per $N > 1$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 = \frac{(b-a)}{12} \left(\frac{(b-a)}{N} \right)^2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2} < \frac{(b-a)^3}{12},$$

*per cui ci si aspetta un errore **assoluto** migliore dalla formula composta.*

Formula composta dei trapezi

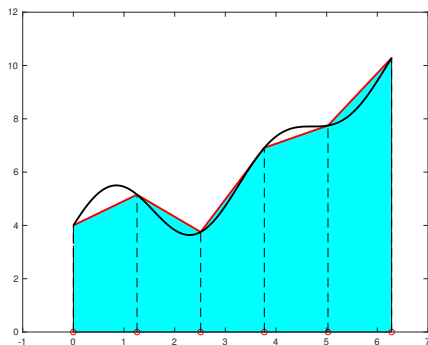


Figure: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola l'area in celeste, ovvero l'integrale della funzione lineare a tratti il cui grafico é in rosso).

La formula dei trapezi ha molte proprietà interessanti. In [2] queste vengono esposte nel dettaglio. Accanto a una interessante nota storica. In particolare sottolinea il lavoro di Poisson, in cui si nota la notevole performance in caso di funzioni periodiche.

It appears to have been Poisson, in the 1820s, who first identified this effect [139]. The example Poisson chose has remained a favorite ever since: the perimeter of an ellipse, which he took to have axis lengths $1/\pi$ and $0.6/\pi$, giving the integral

$$(1.1) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 0.36 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Poisson used this now-standard notation for definite integrals, but apparently it was not yet standard in the 1820s, for he comments that

pour indiquer [les limites de l'intégrale] en même temps que l'intégrale, nous emploierons la notation très-commode que M. Fourier a proposée.¹

Perhaps in 1826 the spelling of Fourier's name wasn't yet standardized either!

The exact solution of (1.1) is

$$(1.2) \quad I = \frac{2}{\pi} E(0.36) = 0.90277992777219 \dots,$$

where E is the complete elliptic integral of the second kind. As trapezoidal rule approximations we can take

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - 0.36 \sin^2(2\pi k/N)}$$

for any positive integer N , or, equivalently, if N is divisible by 4, exploiting the four-fold symmetry as Poisson did,

$$I_N = \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{N/4} \sqrt{1 - 0.36 \sin^2(2\pi k/N)}.$$

Prendiamo quindi in considerazione una prima analisi dell'integranda

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - 0.36 \sin^2 \theta}$$

e vediamo che é periodica in $[0, 2\pi]$, con derivate successive periodiche. In effetti, sia la geometria (stiamo calcolando il perimetro di una ellisse), sia Maple suggeriscono questo.

```
>> syms f(x)
>> f(x)=(1/(2*pi))*sqrt(1-0.36*(sin(x))^2);
>> g=diff(f,x,1); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
>> g=diff(f,x,2); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
>> g=diff(f,x,3); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
>> g=diff(f,x,4); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
>> g=diff(f,x,25); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
>> g=diff(f,x,30); g(2*pi)-g(0)
ans = 0
```

Formula di Eulero-Maclaurin

Vale il seguente teorema in cui h_N è l'ampiezza del generico subintervallo equispaziato che definisce la formula composta.

Teorema (Formula di Eulero-Mac Laurin, 1735)

Se l'integranda $f \in C^{2M+2}([a, b])$ allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= S_1^{(c)}(f, N) + \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} h_N^{2k} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &\quad - \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h_N^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

dove B_k sono i **numeri di Bernoulli** (Bernoulli, 1713).

Se $f \in C^{2M+2}([a, b])$ e $f^{(2k-1)}(b) = f^{(2k-1)}(a)$, per $k = 1, \dots, M$

$$\int_a^b f(x) dx - S_1^{(c)}(f, N) = -\frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h_N^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi),$$

con $\xi \in (a, b)$ e da $h_N = (b-a)/N$, si ha che $\mathcal{E}_1^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^{2M+2}}$.

Formula di Eulero-Maclaurin (numeri di Bernoulli)

I numeri di Bernoulli furono forse le prime quantità per cui esista un codice per calcolarle da una macchina calcolatrice, la cosiddetta **Analytical Engine** nel 1842, considerato il primo prototipo di calcolatore generico complesso.

C'e' una **disputa** se il suo esecutore sia stato Babbage, il suo costruttore o Ada Lovelace, figlia di Lord Byron, come spesso viene affermato.



Figure: Una parte della macchina analitica.

Visto che l'integranda ha derivate successive di ogni ordine che sono periodiche, dalla formula di Eulero-Mac Laurin ci aspettiamo una convergenza dell'errore

$$|E_1^{(c)}(f)| := \left| \int_a^b f(x)dx - S_1^{(c)}(f, N) \right|$$

piú rapida di N^{-M} per ogni M (qui N é il numero di intervalli equispaziati).

In effetti é di tipo *geometrico*, ovvero $|E_1^{(c)}(f)| \approx \alpha \gamma^{-N}$, per opportuni α, γ (cf. [2], p.387).

N	$ E_1^{(c)}(f) $	N	$ E_1^{(c)}(f) $
2	$9.7e-02$	32	0
4	$2.8e-03$	64	0
8	$1.1e-05$	128	0
16	$5.4e-10$	256	0
32	$1.1e-16$	512	0

Table: Errore della formula dei trapezi composta, suddividendo $[a, b]$ in N subintervalli equispaziati

Formula composta dei trapezi: applicazioni

Integrali di questa struttura sono importanti nelle scienze applicate.

Ad esempio, la formula dei trapezi composta é alla base dell'**algoritmo FFT**, che richiedi integrali con questa struttura.

La **Fast Fourier Transform** viene utilizzata in applicazioni quali

- elaborazione di segnali digitali (é alla base della compressione **mp3**),
- soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali,
- algoritmi per moltiplicare numeri interi di grandi dimensioni.

Originariamente fu scoperta da Cooley-Tukey nel 1965 (anche se secondo alcuni era noto a **Gauss!**).

Nota.

In *IEEE Guest Editors' Introduction: The Top 10 Algorithms*. si scrive:

The FFT is perhaps the most ubiquitous algorithm in use today to analyze and manipulate digital or discrete data.

Formula composta di Cavalieri-Simpson: derivazione

Proposito. (Derivazione formula di Cavalieri-Simpson composta)

Per introdurre la formula composta di Cavalieri-Simpson, supponiamo di aver suddiviso $[a, b]$ in $N = 4$ subintervalli equispaziati $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N-1 = 3$ con $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N = 4$, $h = (b - a)/N$.

Indicata con $S_2(f, t_k, t_{k+1})$ l'applicazione della regola di Cavalieri-Simpson relativamente a f e all'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, posto $c_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{N}$ il punto medio dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$

$$\blacksquare S_2(f, t_0, t_1) = \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1)),$$

$$\blacksquare S_2(f, t_1, t_2) = \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2)),$$

$$\blacksquare S_2(f, t_2, t_3) = \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3)),$$

$$\blacksquare S_2(f, t_3, t_4) = \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4)),$$

ricaviamo che essendo $N = 4$

$$\begin{aligned} S_2^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{6}(f(t_0) + 4 \cdot f(c_0) + f(t_1)) + \frac{h}{6}(f(t_1) + 4 \cdot f(c_1) + f(t_2)) \\ &+ \frac{h}{6}(f(t_2) + 4 \cdot f(c_2) + f(t_3)) + \frac{h}{6}(f(t_3) + 4 \cdot f(c_3) + f(t_4)) = \dots \\ &= \frac{h}{6}f(t_0) + \frac{2h}{6}(f(t_1) + f(t_2) + f(t_3)) + \frac{h}{6}f(t_4) \\ &+ \frac{4h}{6}(f(c_0) + f(c_1) + f(c_2) + f(c_3)). \end{aligned} \tag{6}$$

Formula composta di Cavalieri-Simpson

Da

$$\begin{aligned} S_2^{(c)}(f, a, b, 4) &= \frac{h}{6}f(t_0) + \frac{2h}{6}(f(t_1) + f(t_2) + f(t_3)) + \frac{h}{6}f(t_4) \\ &+ \frac{4h}{6}(f(c_0) + f(c_1) + f(c_2) + f(c_3)). \end{aligned} \quad (7)$$

posto $t_0 = x_0$, $c_0 = x_1$, $t_1 = x_2$, $c_1 = x_3$, $t_2 = x_4$, $c_2 = x_5$, $t_3 = x_6$, $c_3 = x_7$, $t_4 = x_8$, ricaviamo per $N = 4$ (ovvero il numero di suddivisioni)

$$S_2^{(c)}(f, a, b, 4) = \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right) \quad (8)$$

Tale formula è facilmente generalizzabile a un numero di suddivisioni N generico (anche diverso da $N = 4$).

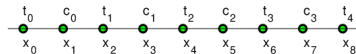


Figure: Relazione tra t_k , c_k e x_j .

Formula composta di Cavalieri-Simpson

Definizione (Formula di Cavalieri-Simpson composta)

Posti $x_k = a + kh/2$, $k = 0, \dots, 2N$, $h = (b - a)/N$, la formula composta di Cavalieri-Simpson è definita da

$$S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (9)$$

Teorema (Errore della formula di Cavalieri-Simpson composta)

Nelle ipotesi di suddivisione equispaziata di passo h , l'errore compiuto è

$$E_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f, a, b, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Nota. (Grado di precisione della formula di Cavalieri-Simpson composta)

Il grado di precisione è quindi 3, come la regola di Cavalieri-Simpson, ma se $N > 1$ allora il passo h è minore e quindi, come nelle formule composte precedenti, ci si aspetta un errore assoluto inferiore dalle formula composte.

Formula composta di Cavalieri-Simpson

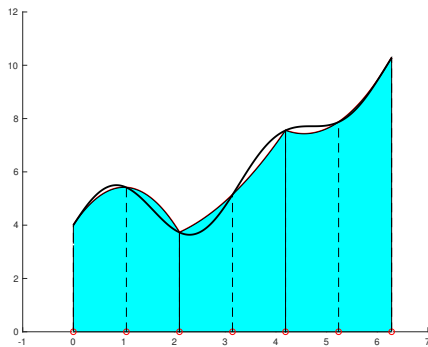


Figure: Formula di Cavalieri-Simpson composta per il calcolo di $\int_0^{2\pi} 3 + \sin(2x) + \cos(x) + x \, dx$ (la formula composta calcola il volume dell'area in celeste).

In questa sezione forniamo alcuni esempi in cui applichiamo le formule composte per integrare alcune funzioni $f \in C([a, b])$.

Esempio (1)

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^{\pi} \exp(x) \cos(x) dx = -(\exp(\pi) + 1)/2.$$

*mediante le formule composte note $S_k^{(c)}(f, 0, \pi, N)$,
 $N = 1, 2, 4, \dots, 512$, $k = 0, 1, 2$.*

Nota.

Si osservi che l'integranda è una funzione appartenente a $C^\infty([0, 2\pi])$ (è perfino [intera](#)). Quindi abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule composte viste precedentemente.

Alcuni confronti numerici: esempio 1

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.2e + 01$	$2.3e + 01$	$4.8e - 01$	1	2	3
2	$2.8e + 00$	$5.3e + 00$	$8.5e - 02$	2	3	5
4	$6.4e - 01$	$1.3e + 00$	$6.1e - 03$	4	5	9
8	$1.6e - 01$	$3.1e - 01$	$3.9e - 04$	8	9	17
16	$3.9e - 02$	$7.8e - 02$	$2.5e - 05$	16	17	33
32	$9.7e - 03$	$1.9e - 02$	$1.6e - 06$	32	33	65
64	$2.4e - 03$	$4.8e - 03$	$9.7e - 08$	64	65	129
128	$6.1e - 04$	$1.2e - 03$	$6.1e - 09$	128	129	257
256	$1.5e - 04$	$3.0e - 04$	$3.8e - 10$	256	257	513
512	$3.8e - 05$	$7.6e - 05$	$2.4e - 11$	512	513	1025

Table: Paragone delle formule del punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x)dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_0^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_1^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_2^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_2^{(c)}(f, a, b, N)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Commento. (Facoltativo)

*Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando **N suddivisioni**, mostriamo*

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{(E_k^{(c)}(f))_N}{(E_k^{(c)}(f))_{2N}}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	4.33	4.27	5.59
2	4.34	4.20	13.92
4	4.10	4.06	15.54
8	4.03	4.02	15.89
16	4.01	4.00	15.97
32	4.00	4.00	15.99
64	4.00	4.00	16.00
128	4.00	4.00	16.00
256	4.00	4.00	16.00

Table: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = \exp(x) \cos(x)$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio (2)

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx \approx 2.7468015338900322319659608$$

*mediante le formule composte note $S_k^{(c)}(f, -5, 5, N)$,
 $N = 1, 2, 4, \dots, 1024$, $k = 0, 1, 2$.*

Nota.

Si osservi che l'integranda è una funzione appartenente a $C^\infty([-5, 5])$. Quindi abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule composte viste precedentemente.

Alcuni confronti numerici: esempio 2

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$7.3e + 00$	$2.4e + 00$	$4.0e + 00$	1	2	3
2	$1.4e + 00$	$2.4e + 00$	$9.6e - 02$	2	3	5
4	$4.6e - 01$	$5.4e - 01$	$1.3e - 01$	4	5	9
8	$3.9e - 02$	$3.8e - 02$	$1.3e - 02$	8	9	17
16	$2.1e - 04$	$6.9e - 04$	$9.1e - 05$	16	17	33
32	$1.2e - 04$	$2.4e - 04$	$4.5e - 08$	32	33	65
64	$3.0e - 05$	$6.0e - 05$	$2.6e - 09$	64	65	129
128	$7.5e - 06$	$1.5e - 05$	$1.6e - 10$	128	129	257
256	$1.9e - 06$	$3.8e - 06$	$1.0e - 11$	256	257	513
512	$4.7e - 07$	$9.4e - 07$	$6.4e - 13$	512	513	1025
1024	$1.2e - 07$	$2.4e - 07$	$4.0e - 14$	1024	1025	2049

Table: Paragone delle formule del punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_{-5}^5 f(x)dx$ con $f(x) = 1/(1+x^2)$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_0^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_1^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_2^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_2^{(c)}(f, a, b, N)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Esempio (3)

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx = 2/9.$$

*mediante le formule composte note $S_k^{(c)}(f, 0, 1, N)$,
 $N = 1, 2, 4, \dots, 1024$, $k = 0, 1, 2$.*

Nota.

*Si osservi che l'integranda è una funzione appartenente a $C^3([0, 1])$.
Quindi abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule viste
ad eccezione di quella di Cavalieri-Simpson composta che richiede
 $f \in C^4([0, 1])$*

Alcuni confronti numerici: esempio 3

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$1.3e-01$	$2.8e-01$	$3.4e-03$	1	2	3
2	$3.6e-02$	$7.2e-02$	$2.3e-04$	2	3	5
4	$9.1e-03$	$1.8e-02$	$1.5e-05$	4	5	9
8	$2.3e-03$	$4.6e-03$	$1.0e-06$	8	9	17
16	$5.7e-04$	$1.1e-03$	$6.5e-08$	16	17	33
32	$1.4e-04$	$2.8e-04$	$4.1e-09$	32	33	65
64	$3.6e-05$	$7.1e-05$	$2.6e-10$	64	65	129
128	$8.9e-06$	$1.8e-05$	$1.7e-11$	128	129	257
256	$2.2e-06$	$4.5e-06$	$1.0e-12$	256	257	513
512	$5.6e-07$	$1.1e-06$	$6.6e-14$	512	513	1025
1024	$1.4e-07$	$2.8e-07$	$4.1e-15$	1024	1025	2049

Table: Paragone delle formule del punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = x^3 \sqrt{x} dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_0^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_1^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_2^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_2^{(c)}(f, a, b, N)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R, \#_N^T, \#_N^{CS}$.

Commento. (Facoltativo)

Nella prossima tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $(E_k^{(c)}(f))_N$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Dalle tabelle vedremo che i valori relativi

- *alle formule composte del **punto medio e dei trapezi tendono a 4**,*
- *alla formula composta di **Cavalieri-Simpson tendono a 16**,*

*e quindi con errori rispettivamente del tipo C^*h^2 e C^*h^4 .*

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	3.76	3.86	14.56
2	3.93	3.96	15.00
4	3.98	3.99	15.31
8	4.00	4.00	15.53
16	4.00	4.00	15.67
32	4.00	4.00	15.77
64	4.00	4.00	15.84
128	4.00	4.00	15.89
256	4.00	4.00	15.92
512	4.00	4.00	16.06

Table: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = x^3\sqrt{x}dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio (4)

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3.$$

*mediante le formule composte note $S_k^{(c)}(f, 0, 1, N)$,
 $N = 1, 2, 4, \dots, 2048$, $k = 0, 1, 2$.*

Nota.

Si osservi che l'integranda è una funzione appartenente a $C([0, 1])$ ma non a $C^1([0, 1])$ (non derivabile in 0). Quindi non abbiamo formule dell'errore compiuto per tutte le formule visto che richiedono a seconda dei casi $f \in C^2([0, 1])$ oppure $f \in C^4([0, 1])$.

Alcuni confronti numerici: esempio 4

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$4.0e-02$	$1.7e-01$	$2.9e-02$	1	2	3
2	$1.6e-02$	$6.3e-02$	$1.0e-02$	2	3	5
4	$6.3e-03$	$2.3e-02$	$3.6e-03$	4	5	9
8	$2.4e-03$	$8.5e-03$	$1.3e-03$	8	9	17
16	$8.7e-04$	$3.1e-03$	$4.5e-04$	16	17	33
32	$3.2e-04$	$1.1e-03$	$1.6e-04$	32	33	65
64	$1.1e-04$	$4.0e-04$	$5.6e-05$	64	65	129
128	$4.1e-05$	$1.4e-04$	$2.0e-05$	128	129	257
256	$1.5e-05$	$5.0e-05$	$7.0e-06$	256	257	513
512	$5.2e-06$	$1.8e-05$	$2.5e-06$	512	513	1025
1024	$1.8e-06$	$6.3e-06$	$8.8e-07$	1024	1025	2049
2048	$6.5e-07$	$2.2e-06$	$3.1e-07$	2048	2049	4097

Table: Paragone delle formule del punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti e rispettive cardinalità.

Un effetto della bassa regolarità della integranda è che la convergenza delle tre famiglie di formule è relativamente lenta, ciò nonostante risultano convergenti.

Commento. (Facoltativo)

Nella tabella successiva, mostriamo il rapporto tra 2 errori successivi per ogni formula ovvero se $|(E_k^{(c)}(f))_N|$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore assoluto compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, mostriamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

*In particolare si vede che i valori relativi alle tre **formule composte del punto medio e dei trapezi tendono a $2.83 \approx 2^{1.5}$** e quindi la convergenza è del tipo $C^* h^{1.5}$ (cf. [?, p262 e p.291]).*

Alcuni confronti numerici: esempio 4 (facoltativo)

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	2.47	2.64	2.82
2	2.59	2.70	2.83
4	2.67	2.74	2.83
8	2.72	2.77	2.83
16	2.75	2.79	2.83
32	2.78	2.80	2.83
64	2.79	2.81	2.83
128	2.80	2.81	2.83
256	2.81	2.82	2.83
512	2.82	2.82	2.83
1024	2.82	2.82	2.83

Table: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^1 f(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{x}$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Esempio (5)

Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^{100} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(100)$$

dove $\operatorname{erf}(x)$ è la funzione di errore, mediante le formule composte note $S_k^{(c)}(f, 0, 1000, N)$, $N = 1, 2, 4, \dots, 256$, $k = 0, 1, 2$.

Nota.

Ricordiamo che la funzione $\exp(-x^2)$ non ha primitiva e quindi non è applicabile il teorema fondamentale del calcolo integrale per determinare il valore di I .

Nella prima tabella che segue esponiamo gli errori compiuti dalle regole composte per $N = 1, 2, 4, \dots, 256$.

Alcuni confronti numerici: esempio 5

N	$ E_0^{(c)}(f) $	$ E_1^{(c)}(f) $	$ E_2^{(c)}(f) $	$\#_N^R$	$\#_N^T$	$\#_N^{CS}$
1	$8.9e-01$	$4.9e+01$	$1.6e+01$	1	2	3
2	$8.9e-01$	$2.4e+01$	$7.4e+00$	2	3	5
4	$8.9e-01$	$1.2e+01$	$3.3e+00$	4	5	9
8	$8.9e-01$	$5.4e+00$	$1.2e+00$	8	9	17
16	$8.9e-01$	$2.2e+00$	$1.6e-01$	16	17	33
32	$6.1e-01$	$6.8e-01$	$1.8e-01$	32	33	65
64	$3.1e-02$	$3.1e-02$	$1.0e-02$	64	65	129
128	$1.7e-07$	$1.7e-07$	$5.6e-08$	128	129	257
256	$1.1e-16$	$1.1e-16$	$2.2e-16$	256	257	513

Table: Paragone delle formule del punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono gli errori assoluti $|E_0^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_0^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_1^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_1^{(c)}(f, a, b, N)|$, $|E_2^{(c)}(f)| = |I(f, a, b) - S_2^{(c)}(f, a, b, N)|$, per ogni formula e rispettivi numeri di nodi $\#_N^R$, $\#_N^T$, $\#_N^{CS}$.

Commento. (Facoltativo)

- Per $n \leq 64$ l'errore decresce lentamente, ed è comprensibile visto che l'intervallo ha ampiezza 100 e quindi il numero di campionamenti delle formule composte sono troppo pochi, ossia il valore di h troppo grande.
- Nella seconda tabella, mostriamo il rapporto tra 2 errori assoluti successivi per ogni formula ovvero se $|(E_k^{(c)}(f))_N|$, $k = 0, 1, 2$, è l'errore compiuto dalla formula S_k , relativamente al calcolo di $\int_a^b f(x)dx$, utilizzando N suddivisioni, valutiamo

$$(r_k^{(c)}(f))_N = \frac{|(E_k^{(c)}(f))_N|}{|(E_k^{(c)}(f))_{2N}|}$$

per $k = 0, 1, 2$ (ossia per le formule composte del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson).

Alcuni confronti numerici: esempio 5 (facoltativo)

N	$(r_0^{(c)}(f))_N$	$(r_1^{(c)}(f))_N$	$(r_2^{(c)}(f))_N$
1	1.00	2.04	2.12
2	1.00	2.08	2.27
4	1.00	2.17	2.74
8	1.00	2.40	7.69
16	1.44	3.31	0.85
32	19.74	21.74	17.74
64	184935.89	184937.89	184933.89
128	1515188455.00	1515188459.00	252531408.50

Table: Decadimento degli errori delle formule del rettangolo, trapezi e Cavalieri-Simpson composta, per N subintervalli, relativamente al calcolo di $I = \int_0^{100} f(x)dx$ con $f(x) = \exp(-x^2) dx$, in cui si descrivono i rapporti tra 2 errori successivi per ogni formula.

Osserviamo che dal caso precedente i valori relativi alle formule composte del punto medio e dei trapezi non tendono a 4, e quelli della formula composta di Cavalieri-Simpson non tendono a 16.



David M. Bressoud, *Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus*, The American Mathematical Monthly , Vol. 118, No. 2 (February 2011), pp. 99-115.



Lloyd N. Trefethen, *The Exponentially Convergent Trapezoidal Rule*, SIAM review 2014, Vol. 56, No. 3, pp. 385-458.