Temi di esame di Analisi Numerica
(Matematica, Univ. di Padova, Alvise Sommariva)

1 Compitino I, 2018

1. Descrizione degli zeri dei polinomi ortogonali: cardinalitá, molteplicitá (con dimostrazione). In che parte del corso questo asserto é risultato di fondamentale importanza?
2. Stabilitá delle formule di quadratura (con dimostrazione). Perché sono da preferire formule a pesi positivi? Citare alcune formule con questa proprietá.

2 Compitino II, 2018

Prima parte del corso

M,I Costanti di Lebesgue, massimo errore in norma infinito ed errore di migliore approssimazione (con dimostrazione).

M,I Descrizione degli zeri dei polinomi ortogonali: cardinalitá, molteplicitá (con dimostrazione).

M,I Legame tra somma dei moduli dei pesi e stabilitá delle formule di quadratura.

M,I Si puó stabilire dai teoremi di Jackson, perché l'interpolante della funzione di Runge nei nodi di Chebyshev risulti convergente al crescere del numero di nodi?

Seconda parte del corso

M,I Test di arresto per metodi iterativi stazionari per la soluzione di sistemi lineari e loro proprietá.

M,I Metodo delle potenze. Algoritmo e un teorema di convergenza (con dimostrazione).

M,I Assoluta stabilita' di Eulero esplicito ed implicito (relativamente al problema test per ODE), con dimostrazione.

M Metodo delle linee per la risoluzione dell'equazione del calore.

I Conseguenze del teorema di Polya-Steklov relativamente alle formule gaussiane.

Appello

M,I Descrizione degli zeri dei polinomi ortogonali: cardinalitá, molteplicitá (con dimostrazione).

M,I Si puó stabilire dai teoremi di Jackson, perché l'interpolante della funzione di Runge nei nodi di Chebyshev risulti convergente al crescere del numero di nodi?

M,I Definizione di convergenza e consistenza per metodi numerici per problemi di Cauchy.

M,I Assoluta stabilita' di Eulero esplicito ed implicito (relativamente al problema test per ODE), con dimostrazione.

3 Compito I, 2018

Prima parte del corso

(M,I) Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per in $C([a, b])$, dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione.

(M,I) Teorema della Proiezione ortogonale (con dimostrazione).

(M,I) Formule di Newton-Cotes (e loro grado di precisione). Formule composte e loro errori rispetto a certe derivate.

(M,I) Teorema di Polya-Steklov (con dimostrazione) e sue conseguenze.

Seconda parte del corso

(M,I) Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (con dimostrazione nel caso non diagonalizzabile).

(M,I) Teorema di convergenza metodo QR.

(M,I) Dimostrazione della convergenza Eulero esplicito (caso Lipschitziano, sotto opportune condizioni derivata seconda).

(I) Definizione di convergenza per metodi LMM. Root-condition.

(M) Equazione di Poisson (caso univariato).

Appello

(M,I) Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per in $C([a, b])$, dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione.

(M,I) Teorema della Proiezione ortogonale (con dimostrazione).

(M,I) Dimostrazione della convergenza Eulero esplicito (caso Lipschitziano, sotto opportune condizioni derivata seconda). Root-Condition per metodi LMM.

(M) Equazione di Poisson (caso univariato).

(I) Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (ma non la dimostrazione). Sue applicazioni a matrici a predominanza diagonale, tridiagonali e definite positive.

4 Compito II, 2018

Prima parte del corso

(M,I) Polinomi di Chebyshev e loro zeri.

(M,I) Teorema degli zeri dei polinomi ortogonali (con dimostrazione).

(M,I) Definizione di funzione peso e suoi esempi. Dimostrare che i polinomi appartengono a $L^2_w(a, b)$.

(M,I) Stabilitá delle formule di quadratura. Perché sono da preferire formule a pesi positivi?

Seconda parte del corso

(M,I) Metodi del gradiente.

(M,I) Metodo delle potenze inverse.

(M,I) Metodi LMM e definizione degli errori di troncamento.

(I) Assoluta stabilitá per ODE. Analisi dell'assoluta stabilitá di Eulero Esplicito.

(M) Metodo delle linee per l'equazione del calore.

Appello

(M,I) Definizione di funzione peso e suoi esempi. Dimostrare che i polinomi appartengono a $L^2_w(a,b)$.

(M,I) Stabilitá delle formule di quadratura. Perché sono da preferire formule a pesi positivi?

(M,I) Metodi LMM e definizione degli errori di troncamento.

(M) Metodo delle linee per l'equazione del calore.

(I) Metodi del gradiente.

5 Compito III, 2018

Prima parte del corso

(M,I) Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per in $C([a,b])$, dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione.

(M,I) Teorema della Proiezione ortogonale (con dimostrazione).

M,I Funzione peso con esempi. Definizione di polinomi ortogonali e descrizione dei lori zeri (cardinalitá, molteplicitá, senza dimostrazione).

M,I Stabilitá delle formule di quadratura (con dimostrazione). Dimostrare perché le formule gaussiane sono convergenti.

Seconda parte del corso

M,I Metodi del gradiente.

M,I Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (con dimostrazione nel caso diagonalizzabile).

M,I Metodo di Eulero esplicito. Convergenza del metodo sotto opportune ipotesi (con dimostrazione).

M,I Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

Appello

M,I Funzione peso con esempi. Definizione di polinomi ortogonali e descrizione dei lori zeri (cardinalitá, molteplicitá, senza dimostrazione).

M,I Stabilitá delle formule di quadratura (senza dimostrazione). Dimostrare perché le formule gaussiane sono convergenti.

M,I Metodo di Eulero esplicito. Convergenza del metodo sotto opportune ipotesi (con dimostrazione).

M,I Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

6 Compito IV, 2018

Prima parte del corso

(M,I) Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per f in $C([a,b])$, dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione.

(M,I) Teorema della Proiezione ortogonale (con dimostrazione).

M,I Funzione peso con esempi. Definizione di polinomi ortogonali e descrizione dei lori zeri (cardinalitá, molteplicitá, senza dimostrazione).

M,I Stabilitá delle formule di quadratura (con dimostrazione). Dimostrare perché le formule gaussiane sono convergenti.

Seconda parte del corso

M,I Metodi del gradiente.

M,I Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (con dimostrazione nel caso diagonalizzabile).

M,I Metodo di Eulero esplicito. Convergenza del metodo sotto opportune ipotesi (con dimostrazione).

M,I Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza.

Appello

M,I Funzione peso con esempi. Definizione di polinomi ortogonali e descrizione dei lori zeri (cardinalitá, molteplicitá, senza dimostrazione).

M,I Stabilitá delle formule di quadratura (senza dimostrazione). Dimostrare perché le formule gaussiane sono convergenti.

M,I Metodo di Eulero esplicito. Convergenza del metodo sotto opportune ipotesi (con dimostrazione).

M,I Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

7 Compito V, 2018

Prima parte del corso

(M,I) Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per in $C([a,b])$, dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione.

(M,I) Teorema degli zeri dei polinomi ortogonali (con dimostrazione).

(M,I) Definizione di funzione peso e suoi esempi. Dimostrare che i polinomi appartengono a $L^2_w(a,b)$.

(M,I) Esistenza e unicitá delle formule gaussiane (con dimostrazione).

Seconda parte del corso

(M,I) Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (con dimostrazione nel caso non diagonalizzabile).

(M,I) Metodi del gradiente.

(M,I) Metodo delle potenze inverse.

(M,I) Dimostrazione della convergenza Eulero esplicito (caso Lipschitziano, sotto opportune condizioni derivata seconda).

Appello

(M,I) Teorema degli zeri dei polinomi ortogonali (senza dimostrazione).

(M,I) Esistenza e unicitá delle formule gaussiane (con dimostrazione).

(M,I) Metodi del gradiente.

(M,I) Dimostrazione della convergenza Eulero esplicito (caso Lipschitziano, sotto opportune condizioni derivata seconda).

8 Compitino I, 2019

1. Descrizione degli zeri dei polinomi ortogonali: cardinalitá, molteplicitá (con dimostrazione). In che parte del corso questo asserto é risultato di fondamentale importanza?

2. Stabilitá delle formule di quadratura (con dimostrazione). Perché sono da preferire formule a pesi positivi? Citare alcune formule con questa proprietá.

9 Compitino II, 2019

1. (a) Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (senza dimostrazione).

   (b) Citare alcuni teoremi di convergenza relativi al metodo di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

   (c) Se si considera la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   e si desidera risolvere $Ax = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$, il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente? Perché?

2. (a) Equazione di Poisson nel caso univariato (descrizione di un metodo alle differenze per la sua risoluzione).

   (b) Applichereste il metodo del gradiente coniugato per risolvere il sistema lineare proposto (giustificare la risposta)?

   (c) E la fattorizzazione LU risulta costosa (citare la complessitá computazionale)?

10 Compito I, 2020

1. Teorema di Polya-Steklov (enunciato e dimostrazione). Perché le formule gaussiane risultano convergenti?

2. Risoluzione dell'equazione del calore mediante il metodo delle linee. Applichereste il metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo della matrice tridiagonale A che definisce il sistema differenziale lineare $u' = Au + g$, $u(0) = u_0$? Giustificare la risposta.

11 Compito II, 2020

12 Compito III, 2020

13 Compito IV, 2020

14 Compito V, 2020

1. Metodo delle potenze: descrizione e teorema di convergenza (con dimostrazione). Si chiede se sia possibile applicarlo alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

   e perché.

2. Assoluta stabilitá di un metodo per la soluzione di ODE. Discutere rigorosamente i casi notevoli dei metodo di Eulero Esplicito e Eulero Implicito.

15 Compitino I, 2021

Domanda 1.

- Definizione di funzione peso e suoi esempi (funzioni peso classiche). Dimostrare che i polinomi appartengono a $L^2_w(a, b)$.

- Citare alcuni ambiti propri dell'interpolazione e dell'integrazione in cui risulta rilevante la conoscenza degli zeri dei polinomi ortogonali rispetto a tali funzioni peso.

Domanda 2.

- Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per in C([a, b]), dotato di norma infinito. Teorema di equioscillazione (asserto).

16 Compitino II, 2021

Domanda 1.

- Teorema di convergenza di un metodo iterativo stazionario, caso generale (con dimostrazione).
- Citare alcuni teoremi di convergenza del metodo di Jacobi e Gauss-Seidel (SOR).
- Cosa dice il teorema di convergenza globale per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ col metodo di Jacobi, qualora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \text{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \end{pmatrix}$$

Domanda 2.

- A-Stabilita': problema test e sua motivazione.
- Regioni di stabilita' di Eulero esplicito, implicito e Crank-Nicolson (inclusa la dimostrazione).
- Barriere di Dahlquist.

17 Compito I, 2021

Domanda 1.

- Definizione di funzioni peso ed esempi notevoli.
- Polinomi ortogonali.
- Teorema sugli zeri di polinomi ortogonali (con dimostrazione).
- Formula di ricorrenza a tre termini.

Domanda 2.

- Metodi di discesa.
- Metodo del gradiente classico e del gradiente coniugato.
- Proprietá del gradiente classico, con speciale riferimento agli spazi di Krylov.
- Si puó applicare il metodo del gradiente coniugato per risolvere il sistema lineare $Ax = b$
$$A = \begin{pmatrix} 2+\epsilon & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}$$
con $\epsilon > 0$ e perché? Se la risposta é affermativa, quante iterazioni sono al piú necessarie per fornire la soluzione esatta?

18 Compito II, 2021

Domanda 1.

- Relazione tra stabilitá e costante di Lebesgue.
- Costante di Lebesgue e teorema che la relaziona alla miglior approssimante polinomiale (asserto e dimostrazione).
- Stima della costante di Lebesgue per nodi equispaziati e di tipo Chebyshev.

Domanda 2.

- Introdurre i metodi iterativi stazionari e quelli di tipo Richardson, motivando perché i primi rientrano tra i secondi.
- Teorema di convergenza di un metodo iterativo stazionario, caso generale (con dimostrazione).
- Citare alcuni teoremi di convergenza del metodo di Jacobi e Gauss-Seidel (SOR).
- Cosa dice il teorema di convergenza globale per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ col metodo di Jacobi, qualora
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

19 Compito III, 2021

Domanda 1.

- Teorema di Polya-Steklov (asserto e dimostrazione).
- Corollari del teorema di Polya-Steklov relativi alle formule a pesi positivi e alle formule gaussiane (asserto e dimostrazione).
- Perché tali corollari non sono applicabili qualora si consideri quale famiglia di formule quella delle regole di tipo Newton-Cotes chiuse a $n = 1, 2, \ldots$ punti in $[-1, 1]$?

Domanda 2.

- Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso bivariato, su dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$).
- Citare particolare stima dell'errore qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.

20 Compito IV, 2021

Domanda 1.

- Polinomi di Chebyshev e loro zeri. Breve descrizione con accenno alla funzione peso omonima e ricorsione a tre termini.
- Descrivere la ricorsione a tre termini per polinomi ortogonali monici (ricordando cosa siano questi ultimi!).
- Cosa si puo' dire relativamente alla ricorsione a tre termini relativamente al peso di Chebyshev? Rientra in quanto descritto nel punto precedente (dare una motivazione)?

Domanda 2.

- Metodo QR: dire che problema risolve, fornendo
  (a) una sua descrizione,
  (b) la sua implementazione,
  (c) un teorema di convergenza.

21 Compito V, 2021

Domanda 1.

- Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicitá).
- Analisi della stabilitá di una formula di quadratura relativamente alla somma dei moduli dei pesi.
- Perché si preferisce che i pesi siano positivi?

Domanda 2.

- Equazione del calore (descrizione del caso unidimensionale).
- Sua risoluzione mediante il metodo delle linee.

22 Compitino I, 2022

1. Teorema degli zeri dei polinomi ortogonali (con dimostrazione).

   Si conoscono tali zeri nel caso dei polinomi ortogonali di Chebyshev? Chi sono?

2. Teorema di Stieltjes sul legame dell'errore di quadratura con somma dei moduli dei pesi.

   Cosa si puó dire nel caso si utilizzi una formula gaussiana relativamente alla funzione peso di Legendre?

   Esistono per la funzione peso di Legendre delle formule di quadratura per cui il secondo membro della stima risulta maggiore? Perché?

23 Compitino II, 2022

Punto 1.

1. Metodo delle potenze: asserto e teorema di convergenza (con dimostrazione).
2. Metodo delle potenze inverse.

3. cosa si puo' dire sul metodo delle potenze per il calcolo degli autovalori della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
Si puó applicare il metodo delle potenze inverse, partendo da un punto opportuno?

Punto 2.

1. Definizione di assoluta stabilitá;

2. studio dell'assoluta stabilitá di Eulero esplicito ed implicito, con dimostrazioni;

3. che passo $h > 0" usereste per studiare col metodo di Eulero esplicito il problema
$$\begin{cases} y'(x) = (-1000 \cdot i) \cdot y(x), \;\; x \geq 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$
Giustificare la risposta.

24 Appello I, 2022

1. Costante Lebesgue

2. Richardson + Convergenza

Punto 1.

1. Relazione tra stabilitá e costante di Lebesgue.

2. Costante di Lebesgue e teorema che la relaziona alla miglior approssimante polinomiale (asserto e dimostrazione).

3. Stima della costante di Lebesgue per nodi equispaziati e di tipo Chebyshev.

Punto 2.

1. Definire i metodi di Richardson stazionari e quelli iterativi stazionari, mostrando che questi ultimi sono particolari metodi di Richardson stazionari.

2. Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (asserto).

3. Citare alcuni teoremi di convergenza relativi al metodo di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

4. Se si considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1.46 & 1.45 & 10^{-4} \\ 1.45 & 3 & 1.54 \\ 10^{-4} & 1.54 & 1.55 \end{pmatrix}$$

e si desidera risolvere $Ax = b$ con $b = (1, \pi, \exp(1))^T$, il metodo di Jacobi risulta (globalmente) convergente? Perché?

25 Appello II, 2022

1. Miglior approssimazione

2. Poisson 1D

Punto 1.

1. Esistenza dell'elemento di miglior approssimazione di un elemento f di uno uno spazio normato X, in uno sottospazio S di X, con S avente dimensione finita (definizione di errore di miglior approssimazione, asserto e dimostrazione del teorema).

2. Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per f in $C([a, b])$, dotato di norma infinito.

3. Teorema di equioscillazione (asserto).

Punto 2.

1. Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso univariato, su dominio $\Omega = [a, b]$).

2. Citare alcune stime dell'errore in norma 2 e ∞ qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.

3. Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché? Si puó dire qualcosa relativamente al metodo LU?

26 Appello III, 2022

1. Gradiente
2. Poisson 2D

Punto 1.

- Metodi di discesa.
- Metodo del gradiente classico e del gradiente coniugato.
- Proprietá del gradiente coniugato, con speciale riferimento agli spazi di Krylov.
- Come puó applicare il metodo del gradiente coniugato per risolvere il sistema lineare $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} -(1+\epsilon) & 0 & -1 \\ 0 & -(1+\epsilon) & -1 \\ -1 & -1 & -(2+\epsilon) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4\pi \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

con $\epsilon > 0$ e perché? Quante iterazioni sono al piú necessarie per fornire *numericamente* la soluzione esatta?

Punto 2.

1. Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso bivariato, su dominio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$).
2. Citare una stima dell'errore qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.
3. Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché?

27 Appello IV, 22 settembre 2022

1. Polya-Steklov
2. LMM

Punto 1.

- Teorema di Polya-Steklov (asserto e dimostrazione).

- Corollari del teorema di Polya-Steklov relativi alle formule a pesi positivi e alle formule gaussiane (asserto e dimostrazione).
- Perché tali corollari non sono applicabili qualora si consideri quale famiglia di formule quella delle regole di tipo Newton-Cotes chiuse a $n = 1, 2, \ldots$ punti in $[-1, 1]$?

Punto 2.

1. Definire i metodi Linear Multistep.
2. Definire la consistenza, la (zero) stabilitá e la convergenza di tali metodi.
3. In cosa consiste la *root condition*?
4. Definire il metodo di Eulero esplicito e' consistente, stabilire se vale per esso la root condition. Sapendo che e' consistente si puo' pure dire dal risultato precedente che risulta convergente?

28 Appello V, 31 gennaio 2023

1. Formule Gaussiane
2. Metodo QR

Punto 1.

- Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicitá).
- Analisi della stabilitá di una formula di quadratura relativamente alla somma dei moduli dei pesi.
- Perché si preferisce che i pesi siano positivi?

Punto 2.

- Metodo QR per calcolare gli autovalori di una matrice quadrata A:
  (a) introdurre la fattorizzazione QR di A, descrivendo Q ed R;
  (b) definire le iterazioni del metodo QR;

(c) perché la k sima iterazione di QR fornisce una matrice con gli stessi autovalori della matrice A?

- Implementazione numerica del metodo mediante matrici di Hessenberg. Come sono le matrici ottenute via metodo QR qualora la matrice A sia simmetrica?

- Citare un teorema di convergenza.

29 Compitino 1, 5 maggio 2023

1. Costante Lebesgue

2. Formule gaussiane

Domanda 1.

- Relazione tra stabilità e costante di Lebesgue.

- Costante di Lebesgue e teorema che la relaziona alla miglior approssimante polinomiale (asserto e dimostrazione).

- Stima della costante di Lebesgue per nodi equispaziati e di tipo Chebyshev. Perchè sono da preferire i nodi di tipo Chebyshev?

Domanda 2.

- Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicità).

- Analisi della stabilità di una formula di quadratura relativamente alla somma dei moduli dei pesi.

- Quale problema si incontra qualora alcuni pesi sono negativi?

30 Compitino 2, 5 maggio 2023

1. Iterativi Stazionari

2. Autovalori: Potenze

Domanda 1.

(a) Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (con dimostrazione).

(b) Citare alcuni teoremi di convergenza relativi al metodo di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR, rispettivamente per matrici di tipo tridiagonale, a predominanza diagonale, simmetriche e definite positive

(c) Se, per $0 < \epsilon < \pi/4$, si considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & 0 \\ -1+\epsilon & 2-\epsilon & 1-\epsilon \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e si desidera risolvere $Ax = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$, si puó affermare che il metodo di Gauss-Seidel risulta (globalmente) convergente? Perché?

Domanda 2.

(a) Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

(b) Metodo delle potenze inverse.

(c) Metodo delle potenze (con shift).

31 Appello 1, 26 giugno 2023

1. Miglior approssimazione
2. A Stabilitá

Punto 1.

1. Esistenza dell'elemento di miglior approssimazione di un elemento f di uno uno spazio normato X, in uno sottospazio S di X, con S avente dimensione finita (definizione di errore di miglior approssimazione, asserto e dimostrazione del teorema).
2. Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per f in $C([a, b])$, dotato di norma infinito.
3. Teorema di equioscillazione (asserto).

Punto 2.

- A-Stabilita': problema test e sua motivazione.
- Regioni di stabilita' di Eulero esplicito, implicito e Crank-Nicolson (definire i metodi e includere la dimostrazione).
- Barriere di Dahlquist.

32 Appello 2A, 10 luglio 2023

1. Polinomi ortogonali
2. Poisson 1D

Punto 1.

1. Definizione di funzioni peso ed esempi notevoli.
2. Polinomi ortogonali.
3. Teorema sugli zeri di polinomi ortogonali (con dimostrazione).
4. Formula di ricorrenza a tre termini.

Punto 2.

- Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso univariato, su dominio $\Omega = [a, b]$).
- Citare alcune stime dell'errore in norma 2 e ∞ qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.
- Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché? Si puó dire qualcosa relativamente al metodo LU?

33 Appello 2B, 10 luglio 2023

Argomenti.

1. Polya-Steklov
2. Poisson 2D

Punto 1.

1. Teorema di Polya-Steklov (asserto e dimostrazione).
2. Corollari del teorema di Polya-Steklov relativi alle formule a pesi positivi e alle formule gaussiane (asserto e dimostrazione).
3. Perché tali corollari non sono applicabili qualora si consideri quale famiglia di formule quella delle regole di tipo Newton-Cotes chiuse a $n = 1, 2, \ldots$ punti in $[-1, 1]$?

Punto 2.

1. Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso bivariato, su dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$).
2. Citare una stima dell'errore qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.
3. Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché?

34 Appello 3, agosto 2023

1. Gradiente
2. LMM

Punto 1.

1. Metodi di discesa.
2. Metodo del gradiente classico e del gradiente coniugato.
3. Proprietá del gradiente coniugato, con speciale riferimento agli spazi di Krylov.
4. Per quali $\epsilon > 0$ si puó applicare il metodo del gradiente coniugato per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, qualora sia

$$A = \begin{pmatrix} (1+2\epsilon) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & (1+\epsilon) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3+\epsilon \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4\pi \\ -1 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

   e perché? Quante iterazioni sono al piú necessarie per fornire *numericamente* la soluzione esatta?

Punto 2.

1. Definire i metodi Linear Multistep.
2. Definire la consistenza, la (zero) stabilitá e la convergenza di tali metodi.
3. In cosa consiste la *root condition*?
4. Definire il metodo di Eulero esplicito e' consistente, stabilire se vale per esso la root condition. Sapendo che e' consistente si puo' pure dire dal risultato precedente che risulta convergente?

35 Appello 4, 21 settembre 2023

1. Conv. iter. staz.
2. Costante Lebesgue

Punto 1.

1. Definire i metodi di Richardson stazionari e quelli iterativi stazionari, mostrando che questi ultimi sono particolari metodi di Richardson stazionari.
2. Teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari (asserto e dimostrazione).
3. Se si considera la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 10^{-1} & 0.5 \cdot 10^{-2} & 10^{-4} \\ 0.5 \cdot 10^{-2} & 0.5 \cdot 10^{-1} & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 0.5 \cdot 10^{-4} & 10^{-2} \end{pmatrix}$$
e si desidera risolvere $Ax = b$ con $b = (1, \pi, \exp(1))^T$, il metodo di Jacobi risulta (globalmente) convergente? Perché?

Punto 2.

1. Relazione tra stabilitá e costante di Lebesgue.
2. Teorema che relaziona la costante di Lebesgue alla miglior approssimante polinomiale (asserto e dimostrazione).
3. Stima asintotica della costante di Lebesgue per nodi equispaziati e di tipo Chebyshev.

36 Appello 5, 24 Gennaio 2024

1. formule gaussiane e stabilitá
2. Metodo potenze

Punto 1.

1. Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicitá).
2. Analisi della stabilitá di una formula di quadratura relativamente alla somma dei moduli dei pesi.
3. Perché si preferisce che i pesi siano positivi?

Punto 2.

(a) Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

(b) Metodo delle potenze inverse.

(c) Cosa possiamo dire qualora applicassimo il metodo delle potenze classico alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

37 Compitino 1, 6 maggio 2024

1. Miglior approx.
2. Pesi + formule gaussiane

Domanda 1.

- Esistenza dell'elemento di miglior approssimazione di un elemento f di uno uno spazio normato X, in uno sottospazio S di X, con S avente dimensione finita (definizione di errore di miglior approssimazione, asserto e dimostrazione del teorema).
- Esistenza della migliore approssimazione polinomiale per f in $C([a, b])$, dotato di norma infinito.

- Teorema di equioscillazione (asserto).

Domanda 2.

- Definizione di funzione peso.
- Definire le funzioni peso di Legendre, Chebyshev, Gegenbauer, Jacobi, Hermite, Laguerre.
- Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicitá).

38 Compitino 2, 7 giugno 2024

1. Metodi iterativi
2. Poisson 1D

Domanda 1.

- Teorema di convergenza globale di un metodo iterativo stazionario (asserto e dimostrazione).
- Citare alcuni teoremi di convergenza del metodo di Jacobi e Gauss-Seidel, SOR.
- Stabilire la convergenza globale del metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Domanda 2.

- Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso univariato, su dominio $\Omega = [a, b]$).
- Citare alcune stime dell'errore in norma 2 e ∞ qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.
- Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché? Si puó dire qualcosa relativamente al metodo LU?

39 Appello 1, 24 giugno 2024

1. Gradiente
2. Stabilitá assoluta

Punto 1.

- Metodi di discesa (equivalenza di un certo funzionale con la soluzione del sistema lineare associato con descrizione dei metodi di discesa).
- Metodi del gradiente classico e del gradiente coniugato.
- Proprietá del gradiente coniugato, con speciale riferimento agli spazi di Krylov.
- Si puó applicare il metodo del gradiente coniugato per risolvere il sistema lineare $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & -1 \\ -1 & 1+\epsilon \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1+\epsilon \\ 1-\epsilon \end{pmatrix}$$

  con $\epsilon > 0$ e perché? Quante iterazioni sono al piú necessarie per fornire *numericamente* la soluzione esatta?

Punto 2.

1. Definizione di assoluta stabilitá.
2. Studio dell'assoluta stabilitá di Eulero esplicito ed implicito, con dimostrazioni.
3. Definizione di problema stiff.
4. Che passo $h > 0 $ usereste per studiare col metodo di Eulero esplicito il problema

$$\begin{cases} y'(x) = -200 \cdot y(x), \ x \geq 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

   Che passo usereste per i metodi di Eulero esplicito, implicito e di Crank-Nicolson? Giustificare la risposta.

40 Appello 2, 9 luglio 2024

Punto 1.

1. Teorema di Polya-Steklov (asserto e dimostrazione).
2. Corollari del teorema di Polya-Steklov relativi alle formule a pesi positivi e alle formule gaussiane (asserto e dimostrazione).

Punto 2.

1. Definire i metodi Linear Multistep (che problema risolvono?).
2. Definire la consistenza, la (zero) stabilitá e la convergenza di tali metodi.
3. In cosa consiste la *root condition*?
4. Definire il metodo di Eulero esplicito e' consistente, stabilire se vale per esso la root condition. Sapendo che e' consistente si puo' pure dire dal risultato precedente che risulta convergente?

41 Appello 3, 28 agosto 2024, nessun candidato

42 Appello 4, 23 settembre 2024

Punto 1.

1. Formule gaussiane (discussione e dimostrazione della loro esistenza ed unicitá).
2. Analisi della stabilitá di una formula di quadratura relativamente alla somma dei moduli dei pesi.
3. Perché si preferisce che i pesi siano positivi?

Punto 2.

(a) Metodo delle potenze classico e un suo teorema di convergenza (con dimostrazione).

(b) Metodo delle potenze inverse.

(c) Cosa possiamo dire qualora applicassimo il metodo delle potenze classico alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

43 Appello 5, 11 febbraio 2025

Si raccomanda agli studenti di compilare i campi richiesti.

Punto 1.

1. Relazione tra stabilitá e costante di Lebesgue.
2. Teorema che relaziona la costante di Lebesgue alla miglior approssimante polinomiale (asserto e dimostrazione).
3. Stima asintotica della costante di Lebesgue per nodi equispaziati e di tipo Chebyshev.

Punto 2.

1. Discretizzazione dell'equazione di Poisson con metodi alle differenze (caso bivariato, su dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$).
2. Citare una stima dell'errore qualora la soluzione sia di classe $C^4(\Omega)$.
3. Con quali metodi risolvereste il sistema lineare proposto e perché?

44 Compitino 1, 5 maggio 2025

Domanda 1.

- Definizione di funzione peso.
- Definire le funzioni peso di Legendre, Chebyshev, Gegenbauer, Jacobi, Hermite, Laguerre.
- Teorema degli zeri dei polinomi ortogonali (con dimostrazione).

Domanda 2.

- Teorema di Polya-Steklov (asserto e dimostrazione).
- Corollari del teorema di Polya-Steklov relativi alle formule a pesi positivi e alle formule gaussiane (asserto e dimostrazione).
- Perché tali corollari non sono applicabili qualora si consideri quale famiglia di formule quella delle regole di tipo Newton-Cotes chiuse a $n = 1, 2, \ldots$ punti in $[-1, 1]$?