Esercizi di Laboratorio del corso di Analisi Numerica [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Esercizi del corso di Analisi Numerica.

Revisione: 1 giugno 2022

Di seguito si citano gli esercizi effettuati nel corso di Analisi Numerica. Per alcuni riferimenti a codici, si vedano le relative slides esposte nelle ore di laboratorio.

1. Teoria dell'approssimazione

Esercizio 1.1 (Facoltativo). *Sapendo che l'errore in norma infinito dell'interpolante nei nodi di Chebyshev è asintoticamente del tipo $C\gamma^n$, determinare C e γ.*

Suggerimento:

- *Calcolare il rapporto tra $e_{100} \approx C\gamma^{100}$ e $e_{98} \approx C\gamma^{98}$ e dedurre γ.*
- *Nota un'approssimazione di γ, calcolare C da $C \approx e_{100}/\gamma^{100}$.*

Esercizio 1.2. *Mediante Chebfun, si approssimino in $[-1, 1]$*

1. $f(x) = |x - 0.3|$;
2. $f(x) = \exp(x^2)$;
3. $f(x) = \exp(x)$;
4. $f(x) = \sin(x)$;
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove* $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ *se* $x \neq 0$, 1 *se* $x = 0$.

- *Serve* `'splitting', 'on'`*?*
- *Qual'e' il numero di punti di Chebyshev affinchè la funzione sia approssimata alla precisione di macchina in ogni esempio?*

- *La funzione* `sinc` *é predefinita, se installato il* `Signal Processing toolbox`. *Lo é pure in Chebfun, ma risulta* $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$*. Nel nostro esempio, definire:* `f0=chebfun('pi*x'); f=sinc(f0);` *In alternativa, definire*

```
f=@(x) sin(pi*x)./(pi*x+(x == 0));
```

Esercizio 1.3. *Si modifichi la routine* `esempio1.m` *utilizzando quanto visto in* `esempio2.m`*, così da paragonare la miglior approssimante di grado* $n = 10, 20, \ldots, 50$ *con l'interpolante in* $n+1$ *nodi di Chebyshev, sulle funzioni definite in* $[-1, 1]$*:*

1. $f(x) = |x - 0.3|$*;*
2. $f(x) = \exp(x^2)$*;*
3. $f(x) = \exp(x)$*;*
4. $f(x) = \sin(x)$*;*
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove* $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ *se* $x \neq 0$*,* 1 *se* $x = 0$ *(funzione predefinita in* `chebfun`*).*

- *Serve* `'splitting', 'on'` *(chiedersi se la domanda ha senso)?*
- *Negli esempi forniti è molta la differenza tra l'usare l'interpolante in nodi di Chebyshev e la miglior approssimante?*

Esercizio 1.4 (Facoltativo). *Verificare che per nodi equispaziati, unisolventi a grado* n*, per* $n = 1, \ldots, 50$ *si ha che*

$$\frac{2^{n-2}}{n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+3}}{n}$$

come stabilito in Two results on Polynomial Interpolation in Equally Spaced Points, da Trefethen e Weideman, J.A.T. (65), 247-260 (1991).

E' buona la stima asintotica $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1)\, n \log(n)}$*?*

Esercizio 1.5. *Cosa succede se invece di polinomi trigonometrici, si approssima la funzione*

$$f(t) = -\text{sign}(|t| - \pi/2)$$

in $[-\pi, \pi]$ *con il polinomio algebrico di miglior approssimazione in norma infinito, a grado* 5*,* 15*,* 25 *via Chebfun?*

Esercizio 1.6 (Facoltativo). *Che errore si compie in norma* ∞ *e in norma 2, approssimando la funzione*

$$f(t) = \log(0.001 + t),\ t \in [0, 1]$$

con

- *polinomi algebrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun?*
- *polinomi trigonometrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun (nella versione col* `'trunc'`*)?*

Quale delle due approssimazioni è migliore? Ha senso quella trigonometrica (plot!)?

- *Se* `deg` *é il grado allora* `'trunc'` *va fatto per* $N = \ldots$*.*
- *Si noti che se* `fa` *é un oggetto chebfun di natura algebrica e* `ft` *di natura trigonometrica, allora si puó fare* `norm(fa-ft), norm(fa-ft,inf).`
- *Possibili warnings sorgono dalla versione trigonometrica di Chebfun.*
- *Versioni diverse di Matlab/Chebfun possono influenzare il risultato.*

2. Quadratura numerica

Esercizio 2.1. *Usando la formula composta dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, con* $n = 2, 4, 8, \ldots, 512$ *sudd. equispaziate dell'intervallo di integrazione, calcolare*

- $\int_0^{\pi} \exp{(x)} \cdot \cos{(4x)} dx = \frac{\exp{(\pi)}-1}{17}$*;*
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$*;*
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp{(\cos{(x)})} dx = 7.95492652101284$*;*
- $\int_0^{\pi/4} \exp{(\cos{(x)})} dx = 1.93973485062365$*;*
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.

Descrivere

- *come decresce l'errore in scala semilogaritmica (in ascissa mettere il numero di punti di ogni regola ovvero, per* n *suddivisioni,* $n + 1$ *punti per la formula composta dei trapezi e* $2n + 1$ *per quella composta di Cavalieri-Simpson;*
- *quale sia l'andamento del rapporto*

$$E_2(f)/E_4(f),\ E_4(f)/E_8(f),\ \ldots,\ E_{256}(f)/E_{512}(f)$$

dove $E_n = |I(f) - I_n(f)|$ *con* $I(f)$ *integrale esatto e* $I_n(f)$ *valore fornito dalla formula di quadratura.*

Esercizio 2.2. *Usando una opportuna formula gaussiana, con* $n = 10, 20, 30$ *punti, calcolare*

- $\int_0^{\pi} \exp{(x)} \cdot \cos{(4x)} dx = \frac{\exp{(\pi)}-1}{17}$*;*
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$*;*
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp{(\cos{(x)})} dx = 7.95492652101284$*;*
- $\int_0^{\pi/4} \exp{(\cos{(x)})} dx = 1.93973485062365$*;*
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.
- *Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica.*

3. Metodi iterativi

Esercizio 3.1. *Si calcoli la matrice simmetrica e definita positiva minij*$_{20}$ *di ordine 20 aiutandosi con*

```
>> help gallery
```

Sia b *il vettore composto di componenti uguali a* 1*, avente lo stesso numero di righe di* P_{20}.

- *Si risolva col metodo di Jacobi il problema minij*$_{20}x = b$*, con tolleranza di* $10^{(-6)}$*, partendo da* $x^0 = [0\ldots 0]$*. Converge?*
- *Si risolva col metodo di SOR con* $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$ *il problema minij*$_{20}x = b$*, con tolleranza di* $10^{(-6)}$*, partendo da* $x^0 = [0\ldots 0]$.
  - *Converge?*
  - *Eseguire il plot in scala semilogaritmica, avendo in ascisse* ω *e in ordinate il numero di iterazioni eseguite. Quale sembra un buon parametro da utilizzare?*
  - *Calcolare il parametro* ω *che minimizza il numero di iterazioni svolte da SOR.*

Esercizio 3.2. *Si calcoli la matrice di Poisson* $\mathcal{P}_{20}$.

Sia b *il vettore composto di componenti uguali a* 1*, avente lo stesso numero di righe di* $\mathcal{P}_{20}$.

- *Si risolva col gradiente coniugato il problema* $\mathcal{P}_{20}x = b$*, con tolleranza di* $10^{(-12)}$*, partendo da* $x^0 = [0\ldots 0]$.
- *Quante iterazioni servono?*
- *E migliore questo risultato di quello ottenuto con Jacobi e Gauss-Seidel?*
- *(Facoltativo) Applicare il gradiente coniugato alla matrice* `minij` *di ordine* 100 *e paragonare i risultati con quelli ottenuti da Jacobi, Gauss-Seidel e SOR ottimale.*

4. Equazioni differenziali

Esercizio 4.1. *Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi* h *uguali rispettivamente a* 0.2*,* 0.1*,* 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \le x \le 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Per selezionati valori di x, ad esempio $x = 10$, si calcoli il rapporto con cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Esercizio 4.2. *Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.*

Si risolva utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05, con tolleranza pari a 10^{-6},

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$. Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Esercizio 4.3 (Facoltativo). *Implementare i metodi di Adams-Bashforth e Moulton per $p = 3$.*

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Approssimare con tali metodi la soluzione di (3) nell'intervallo $[0, 10]$, in N punti equispaziati x_n, con $N = 2, 4, 8, 16, 32$, descrivendone con un plot l'errore assoluto $\|u_n - Y_n\|_\infty$ (dove $Y_n = y(x_n)$ e u_n l'approssimazione fornita dal metodo numerico in x_n).

Quali valori iniziali si considerino quelli propri della soluzione esatta $Y(x) = \tan^{-1}(x)$ nei punti richiesti.

Esercizio 4.4 (Facoltativo). *Approssimare per $\lambda = -100$ il valore assunto dalla soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- *Si utilizzano i metodi di Eulero esplicito e Eulero implicito con passi $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.*
- *Al variare di h verificare quando $|1 + h\lambda| < 1$.*

- *Stampare gli errori assoluti compiuti nell'approssimare la soluzione in* $x = 100$ *(in formato esponenziale, 1 cifra prima della virgola e 3 dopo la virgola).*
- *Si osservi che la mancata convergenza a* 0 *di Eulero implicito è dovuta al metodo di Eulero esplicito come predittore (si veda il codice di Eulero esplicito).*

Esercizio 4.5 (Facoltativo). *Fissato "N", e posti "*`x0=0`*", "*`xfin=10`*", approssimare mediante il metodo RK2*

$$y(x_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hF(x_n, u_n; h)$$

con

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)),$$

la soluzione "y*" del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2 \cdot \cos(x), & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nei punti $x_k = x_0 + kh$*, con* $h = 10/N$*,* $k = 0, \ldots, N$*.*

Si eseguano due esempi aventi i passi rispettivamente:

1. $h = 0.1$,
2. $h = 0.05$,

e quali parametri del metodo RK si pongano $\gamma_1 = 1/2$*,* $\gamma_2 = 1/2$*,* $\alpha = 1$*,* $\beta = 1$*.*

Noto che la soluzione e' $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$*, calcolare nei due esempi gli errori assoluti compiuti nei punti* $x = 2$*,* $x = 4$*,* $x = 6$*,* $x = 8$*,* $x = 10$*. Si tabulino gli errori richiesti in formato esponenziale, con una cifra prima della virgola e 2 dopo la virgola.*

Riferimenti bibliografici