

Esercizi di Laboratorio del corso di Analisi Numerica a.a. 2023-24 ¹

A. Sommariva²

Keywords: Esercizi del corso di Analisi Numerica.

Revisione: 20 maggio 2024

Di seguito si citano gli esercizi effettuati nel corso di Analisi Numerica. Per alcuni riferimenti a codici, si vedano le relative slides esposte nelle ore di laboratorio.

1. Teoria dell'approssimazione

Esercizio 1.1 (facoltativo). Sapendo che l'errore in norma infinito dell'interpolante nei nodi di Chebyshev è asintoticamente del tipo $C\gamma^n$, determinare C e γ .

Suggerimento:

- Calcolare il rapporto tra $e_{100} \approx C\gamma^{100}$ e $e_{98} \approx C\gamma^{98}$ e dedurre γ .
- Nota un'approssimazione di γ , calcolare C da $C \approx e_{100}/\gamma^{100}$.

Esercizio 1.2 (facoltativo). Mediante Chebfun, si approssimino in $[-1, 1]$

1. $f(x) = |x - 0.3|$;
2. $f(x) = \exp(x^2)$;
3. $f(x) = \exp(x)$;
4. $f(x) = \sin(x)$;
5. $f(x) = \text{sinc}(x)$ dove $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$.

- Serve 'splitting', 'on'?

- Qual'è il numero di punti di Chebyshev affinché la funzione sia approssimata alla precisione di macchina in ogni esempio?
- La funzione `sinc` è predefinita, se installato il Signal Processing toolbox. Lo è pure in Chebfun, ma risulta $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Nel nostro esempio, definire:
`f0=chebfun('pi*x'); f=sinc(f0);` In alternativa, definire

```
f=@(x) sin(pi*x)./(pi*x+(x==0));
```

Esercizio 1.3 (facoltativo). Si modifichi la routine `esempio1.m` utilizzando quanto visto in `esempio2.m`, così da paragonare la miglior approssimante di grado $n = 10, 20, \dots, 50$ con l'interpolante in $n + 1$ nodi di Chebyshev, sulle funzioni definite in $[-1, 1]$:

1. $f(x) = |x - 0.3|$;
 2. $f(x) = \exp(x^2)$;
 3. $f(x) = \exp(x)$;
 4. $f(x) = \sin(x)$;
 5. $f(x) = \text{sinc}(x)$ dove $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$ (funzione predefinita in `chebfun`).
- Serve 'splitting', 'on' (chiedersi se la domanda ha senso)?
 - Negli esempi forniti è molta la differenza tra l'usare l'interpolante in nodi di Chebyshev e la miglior approssimante?

Esercizio 1.4 (facoltativo). Verificare che per nodi equispaziati, unisolventi a grado n , per $n = 1, \dots, 50$ si ha che

$$\frac{2^{n-2}}{n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+3}}{n}$$

come stabilito in [Two results on Polynomial Interpolation in Equally Spaced Points](#), da Trefethen e Weideman, J.A.T. (65), 247-260 (1991).

E' buona la stima asintotica $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1) n \log(n)}$?

Suggerimento:

- Modificare l'esempio 3,
- ricordare il comando `linspace`.

Esercizio 1.5 (facoltativo). Riprovare l'esempio precedente utilizzando l'interpolante trigonometrica polinomiale di grado $N = 11, 31, 5001$.

- Si noti che ciò implica assegnare `2*N+1, 'trig'` invece di `'trunc', N, 'trig'`;
- per completezza, la valutiamo nei punti $\frac{-\pi}{2} + \frac{L}{2N} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{N}$, essendo $L = 2\pi$.

Esercizio 1.6. Cosa succede se invece di polinomi trigonometrici, si approssima la funzione

$$f(t) = -\text{sign}(|t| - \pi/2)$$

in $[-\pi, \pi]$ con il polinomio algebrico interpolante in nodi di Chebyshev scalati, a grado 5, 30, 5000 via Chebfun?

Suggerimento:

1. utilizzare quanto fatto in un esercizio precedente (anche relativamente all'intervallo da usare!),
2. osservare quanti nodi bisogna richiedere per avere una interpolante di grado richiesto.

Esercizio 1.7 (facoltativo). Che errore si compie in norma ∞ e in norma 2, approssimando la funzione

$$f(t) = \log(0.001 + t), \quad t \in [0, 1]$$

con

- polinomi algebrici di grado 11, 31, 51 via Chebfun?
- polinomi trigonometrici di grado 11, 31, 51 via Chebfun (nella versione col 'trunc')?

Quale delle due approssimazioni è migliore? Ha senso quella trigonometrica (plot!)?

- Se `deg` è il grado allora `'trunc'` va fatto per $N = \dots$
- Si noti che se `fa` è un oggetto chebfun di natura algebrica e `ft` di natura trigonometrica, allora si può fare `norm(fa-ft), norm(fa-ft, inf)`.
- Possibili warnings sorgono dalla versione trigonometrica di Chebfun.
- Versioni diverse di Matlab/Chebfun possono influenzare il risultato.

2. Quadratura numerica

Esercizio 2.1. Usando la formula composta dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, con $n = 2, 4, 8, \dots, 512$ sudd. equispaziate dell'intervallo di integrazione, calcolare

- $\int_0^\pi \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17};$
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7};$
- $\int_{-\pi}^\pi \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284;$
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365;$
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}.$

1. **Punto facile:** descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica (in ascissa mettere il numero di punti di ogni regola ovvero, per n suddivisioni, $n + 1$ punti per la formula composta dei trapezi e $2n + 1$ per quella composta di Cavalieri-Simpson, in ordinata l'errore);
2. **Punto da rifletterci su:** descrivere quale sia l'andamento del rapporto

$$E_2(f)/E_4(f), E_4(f)/E_8(f), \dots, E_{256}(f)/E_{512}(f)$$

dove $E_n = |I(f) - I_n(f)|$ con $I(f)$ integrale esatto e $I_n(f)$ valore fornito dalla formula di quadratura.

Esercizio 2.2. Usando una opportuna formula gaussiana, con $n = 10, 20, 30$ punti, calcolare

- $\int_0^\pi \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17};$
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7};$
- $\int_{-\pi}^\pi \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284;$
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365;$
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}.$
- Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica.

Esercizio 2.3 (facoltativo). Si calcolino per $N = 10, 20$ con la formula composta dei trapezi, di Cavalieri-Simpson e un'appropriata formula gaussiana

$$\int_{-1}^1 x^{20} dx = 2/21 \approx 0.095238095238096801 \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} \approx 2.3504023872876032 \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = \text{erf}(1) \cdot \sqrt{\pi} \approx 1.4936482656248538 \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 1/(1 + 16x^2) dx = 1/2 \cdot \text{atan}(4) \approx 0.66290883183401628 \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 e^{-1/x^2} dx \approx 0.17814771178156086 \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 |x|^3 dx = 1/2 \quad (6)$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3 \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 e^x \sqrt{1-x} dx \approx 1.7791436546919095 \quad (8)$$

1. Quali delle formule ha errori relativi inferiori?
2. Quali funzioni risultano più difficili da integrare numericamente?
3. La scelta $N = 10, 20$ nei singoli codici a quanti nodi corrisponde?
4. Suggerimento: ricordarsi che il peso $w(x) \equiv 1$ corrisponde ad un'opportuna scelta del peso di Jacobi.

3. Metodi iterativi

Esercizio 3.1. Quale confronto tra diversi metodi:

- Si assegni ad A la matrice simmetrica e definita positiva `minij20` di ordine 20 aiutandosi con

```
>> help gallery
```

- Sia b il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di P_{20} .
 - Si risolva col metodo di Jacobi il problema $Ax = b$, con tolleranza di $10^{(-6)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$. Converge?
 - Si risolva col metodo di SOR con $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$ il problema $Ax = b$, con tolleranza di $10^{(-6)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$.
 - * Converge?
 - * Eseguire il plot in scala semilogaritmica, avendo in ascisse ω e in ordinate il numero di iterazioni eseguite. Quale sembra un buon parametro da utilizzare?
 - * Calcolare il parametro ω che minimizza il numero di iterazioni svolte da SOR.

Esercizio 3.2. Quale confronto tra diversi metodi:

- Si calcoli la matrice di Poisson P_{20} .
- Sia b il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di P_{20} .
 - Si risolva col gradiente coniugato il problema $P_{20}x = b$, con tolleranza di $10^{(-12)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$.
 - Quante iterazioni servono?
 - E migliore questo risultato di quello ottenuto con Jacobi e Gauss-Seidel?
 - facoltativo Applicare il gradiente coniugato alla matrice `minij` di ordine 100 e paragonare i risultati con quelli ottenuti da Jacobi, Gauss-Seidel e SOR ottimale.

4. Equazioni differenziali

Esercizio 4.1. Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;
- l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.

Per selezionati valori di x , ad esempio $x = 10$, si calcoli il rapporto con cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Esercizio 4.2. Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.

Si risolva utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05, con tolleranza pari a 10^{-6} ,

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$. Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;
- l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.

Esercizio 4.3. Nell'ambito dei metodi a più passi:

- Implementare, a scelta, uno dei seguenti metodi di Adams-Bashforth a più passi

1. ($p=2$): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$;
2. ($p=3$): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$.

Per i passi iniziali, a scelta, si usi uno dei metodi noti ad un passo, ovvero uno tra

1. Eulero-esplicito, 2. Eulero-implicito, 3. Crank-Nicolson.

oppure i valori assunti dalla soluzione esatta.

- Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Per $N = 8, 16, 32$, approssimare con tali metodi la soluzione di (11) nell'intervallo $[0, 10]$, nei punti equispaziati $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \dots, N-1$, $h = (b-a)/(N-1)$, descrivendone con

- un plot,
- o una stampa del valore (1 cifra prima della virgola, 2 dopo la virgola, in formato esponenziale)

l'errore assoluto $\|u_n - Y_n\|_\infty$ (dove $Y_n = Y(x_n)$ e u_n l'approssimazione fornita dal metodo numerico di tipo Adams-Bashforth in x_n).

Esercizio 4.4. Approssimare per $\lambda = -100$ il valore assunto dalla soluzione $\bar{y}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), & x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- Si utilizzi il metodo di Eulero esplicito con passi $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.
- Al variare di h verificare quando $|1 + h\lambda| < 1$.
- Stampare gli errori assoluti compiuti nell'approssimare la soluzione in $x = 100$ (in formato esponenziale, 1 cifra prima della virgola e 3 dopo la virgola).

Esercizio 4.5 (facoltativo). Fissato "N", e posti $x_0=0$, $x_{fin}=10$, approssimare mediante il metodo RK2

$$y(x_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hF(x_n, u_n; h)$$

con

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)),$$

in cui

$$\gamma_1 = 1/2, \gamma_2 = 1/2, \alpha = 1, \beta = 1,$$

la soluzione "y" del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2 \cdot \cos(x), & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nei punti $x_k = x_0 + kh$, con $h = 10/N$, $k = 0, \dots, N$.

Si eseguano due esempi in cui rispettivamente:

1. $N = 100$,
 2. $N = 200$.
- Noto che la soluzione è $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$, calcolare nei due esempi gli errori assoluti compiuti nei punti $x = 2, x = 4, x = 6, x = 8, x = 10$.
 - Si tabulino gli errori richiesti in formato esponenziale, con una cifra prima della virgola e 2 dopo la virgola.