Esercizi di Laboratorio del corso di Analisi Numerica a.a. 2024-25 [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Esercizi del corso di Analisi Numerica.

Revisione: 16 maggio 2025

Di seguito si citano gli esercizi effettuati nel corso di Analisi Numerica. Per alcuni riferimenti a codici, si vedano le relative slides esposte nelle ore di laboratorio.

1. Teoria dell'approssimazione

Esercizio 1.1 (facoltativo). *Sapendo che l'errore in norma infinito dell'interpolante nei nodi di Chebyshev è asintoticamente del tipo $C\gamma^n$, determinare C e γ.*

Suggerimento:

- *Calcolare il rapporto tra $e_{100} \approx C\gamma^{100}$ e $e_{98} \approx C\gamma^{98}$ e dedurre γ.*
- *Nota un'approssimazione di γ, calcolare C da $C \approx e_{100}/\gamma^{100}$.*

Esercizio 1.2 (facoltativo). *Mediante Chebfun, si approssimino in $[-1, 1]$*

1. $f(x) = |x - 0.3|$*;*
2. $f(x) = \exp(x^2)$*;*
3. $f(x) = \exp(x)$*;*
4. $f(x) = \sin(x)$*;*
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove sinc(x)* $= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ *se* $x \neq 0$, 1 *se* $x = 0$.

- *Serve* `'splitting', 'on'`*?*

- *Qual'e' il numero di punti di Chebyshev affinchè la funzione sia approssimata alla precisione di macchina in ogni esempio?*

- *La funzione* `sinc` *é predefinita, se installato il* `Signal Processing toolbox`. *Lo é pure in Chebfun, ma risulta sinc*$(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. *Nel nostro esempio, definire:* `f0=chebfun('pi*x'); f=sinc(f0);` *In alternativa, definire*

```
f=@(x) sin(pi*x)./(pi*x+(x == 0));
```

Esercizio 1.3. *Si modifichi la routine* `esempio1.m` *utilizzando quanto visto in* `esempio2.m`*, così da paragonare la miglior approssimante di grado* $n = 10, 20, \ldots, 50$ *con l'interpolante in* $n + 1$ *nodi di Chebyshev, sulle funzioni definite in* $[-1, 1]$*:*

1. $f(x) = |x - 0.3|$;
2. $f(x) = \exp(x^2)$;
3. $f(x) = \exp(x)$;
4. $f(x) = \sin(x)$;
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove sinc(x)* $= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ *se* $x \neq 0$, 1 *se* $x = 0$ *(funzione predefinita in* `chebfun`*).*

- *Serve* `'splitting', 'on'` *(chiedersi se la domanda ha senso)?*
- *Negli esempi forniti è molta la differenza tra l'usare l'interpolante in nodi di Chebyshev e la miglior approssimante?*

Esercizio 1.4 (facoltativo). *Verificare che per nodi equispaziati, unisolventi a grado* n*, per* $n = 1, \ldots, 50$ *si ha che*

$$\frac{2^{n-2}}{n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+3}}{n}$$

come stabilito in Two results on Polynomial Interpolation in Equally Spaced Points, da Trefethen e Weideman, J.A.T. (65), 247-260 (1991).

E' buona la stima asintotica $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1)\, n \log(n)}$*?*

Suggerimento:

- Modificare l'esempio 3,
- ricordare il comando `linspace`.

Esercizio 1.5 (facoltativo). *Riprovare l'esempio precedente utilizzando l'interpolante trigonometrica polinomiale di grado* $N = 11, 31, 5001$.

- *Si noti che ció implica assegnare* `2*N+1,'trig'` *invece di* `'trunc',N,'trig'`*;*
- *per completezza, la valutiamo nei punti* $\frac{-\pi}{2} + \frac{L}{2N} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{N}$*, essendo* $L = 2\pi$.

Esercizio 1.6. *Cosa succede se invece di polinomi trigonometrici, si approssima la funzione*

$$f(t) = -\mathtt{sign}(|t| - \pi/2)$$

in $[-\pi, \pi]$ *con il polinomio algebrico interpolante in nodi di Chebyshev scalati, a grado* 5*,* 30*,* 5000 *via Chebfun?*

Suggerimento:

1. *utilizzare quanto fatto in un esercizio precedente (anche relativamente all'intervallo da usare!),*
2. *osservare quanti nodi bisogna richiedere per avere una interpolante di grado richiesto.*

Esercizio 1.7 (facoltativo). *Che errore si compie in norma* ∞ *e in norma 2, approssimando la funzione*

$$f(t) = \log(0.001 + t), \ t \in [0, 1]$$

con

- *polinomi algebrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun?*
- *polinomi trigonometrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun (nella versione col* `'trunc'`*)?*

Quale delle due approssimazioni è migliore? Ha senso quella trigonometrica (plot!)?

- *Se* `deg` *é il grado allora* `'trunc'` *va fatto per* $N = ...$
- *Si noti che se* `fa` *é un oggetto chebfun di natura algebrica e* `ft` *di natura trigonometrica, allora si puó fare* `norm(fa-ft)`, `norm(fa-ft,inf)`.
- *Possibili warnings sorgono dalla versione trigonometrica di Chebfun.*
- *Versioni diverse di Matlab/Chebfun possono influenzare il risultato.*

2. Quadratura numerica

Esercizio 2.1. *Usando la formula composta dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, con* $n = 2, 4, 8, \ldots, 512$ *sudd. equispaziate dell'intervallo di integrazione, calcolare*

- $\int_0^{\pi} \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi) - 1}{17}$*;*
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$*;*
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284$*;*
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365$*;*
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.

1. *Punto facile: descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica (in ascissa mettere il numero di punti di ogni regola ovvero, per n suddivisioni, $n+1$ punti per la formula composta dei trapezi e $2n+1$ per quella composta di Cavalieri-Simpson, in ordinata l'errore);*
2. *Punto da rifletterci su: descrivere quale sia l'andamento del rapporto*

$$E_2(f)/E_4(f),\ E_4(f)/E_8(f),\ \ldots,\ E_{256}(f)/E_{512}(f)$$

dove $E_n = |I(f) - I_n(f)|$ con $I(f)$ integrale esatto e $I_n(f)$ valore fornito dalla formula di quadratura.

Esercizio 2.2. *Usando una opportuna formula gaussiana, con $n = 10, 20, 30$ punti, calcolare*

- $\int_0^{\pi} \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17}$*;*
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$*;*
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284$*;*
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365$*;*
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.
- *Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica.*

Esercizio 2.3 (facoltativo). *Si calcolino per $N = 10, 20$ con la formula composta dei trapezi, di Cavalieri-Simpson e un'appropriata formula gaussiana*

$$\int_{-1}^{1} x^{20}\, dx = 2/21 \approx 0.095238095238096801 \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\, dx = e - e^{-1} \approx 2.3504023872876032 \tag{2}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx = \mathit{erf}(1) \cdot \sqrt{\pi} \approx 1.4936482656248538 \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1} 1/(1+16x^2)\, dx = 1/2 \cdot \mathit{atan}(4) \approx 0.66290883183401628 \tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-1/x^2}\, dx \approx 0.17814771178156086 \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|^3\, dx = 1/2 \tag{6}$$

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx = 2/3 \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\sqrt{1-x}\, dx \approx 1.7791436546919095 \tag{8}$$

1. *Quali delle formule ha errori relativi inferiori?*
2. *Quali funzioni risultano più difficili da integrare numericamente?*
3. *La scelta $N = 10, 20$ nei singoli codici a quanti nodi corrisponde?*
4. *Suggerimento: ricordarsi che il peso $w(x) \equiv 1$ corrisponde ad un'opportuna scelta del peso di Jacobi.*

3. Metodi iterativi

Esercizio 3.1. *Quale confronto tra diversi metodi:*

- *Si assegni ad A la matrice simmetrica e definita positiva* $\texttt{minij}_{20}$ *di ordine 20 aiutandosi con*

```
>> help gallery
```

- *Sia b il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di P_{20}.*
  - *Si risolva col metodo di Jacobi il problema $Ax = b$, con tolleranza di $10^{(-6)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$. Converge?*
  - *Si risolva col metodo di SOR con $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$ il problema $Ax = b$, con tolleranza di $10^{(-6)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$.*
    - *Converge?*
    - *Eseguire il plot in scala semilogaritmica, avendo in ascisse ω e in ordinate il numero di iterazioni eseguite. Quale sembra un buon parametro da utilizzare?*
    - *Calcolare il parametro ω che minimizza il numero di iterazioni svolte da SOR.*

Esercizio 3.2. *Quale confronto tra diversi metodi:*

- *Si calcoli la matrice di Poisson $\mathcal{P}_{20}$.*
- *Sia b il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di $\mathcal{P}_{20}$.*
  - *Si risolva col gradiente coniugato il problema $\mathcal{P}_{20}x = b$, con tolleranza di $10^{(-12)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$.*
  - *Quante iterazioni servono?*
  - *E migliore questo risultato di quello ottenuto con Jacobi e Gauss-Seidel?*
  - *facoltativo Applicare il gradiente coniugato alla matrice* `minij` *di ordine 100 e paragonare i risultati con quelli ottenuti da Jacobi, Gauss-Seidel e SOR ottimale.*

4. Equazioni differenziali

Esercizio 4.1. *Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi* h *uguali rispettivamente a* 0.2, 0.1, 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Per selezionati valori di x, *ad esempio* $x = 10$, *si calcoli il rapporto con cui l'errore decresce quando* h *è dimezzato.*

Esercizio 4.2. *Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.*

Si risolva utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passi h *uguali rispettivamente a* 0.2, 0.1, 0.05, *con tolleranza pari a* 10^{-6},

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$. *Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)*

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Esercizio 4.3. *Nell'ambito dei metodi a piú passi:*

- *Implementare, a scelta, uno dei seguenti metodi di Adams-Bashforth a piú passi*

  1. *(p=2):* $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$;
  2. *(p=3):* $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$.

  Per i passi iniziali, a scelta, si usi uno dei metodi noti ad un passo, ovvero uno tra

  1. Eulero-esplicito, 2. Eulero-implicito, 3. Crank-Nicolson.

  oppure i valori assunti dalla soluzione esatta.

- *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Per $N = 8, 16, 32$, *approssimare con tali metodi la soluzione di (11) nell'intervallo* $[0, 10]$, *nei punti equispaziati* $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \ldots, N-1$, $h = (b-a)/(N-1)$, *descrivendone con*

  - *un plot,*
  - *o una stampa del valore (1 cifra prima della virgola, 2 dopo la virgola, in formato esponenziale)*

l'errore assoluto $\|u_n - Y_n\|_\infty$ *(dove* $Y_n = Y(x_n)$ *e* u_n *l'approssimazione fornita dal metodo numerico di tipo Adams-Bashforth in* x_n*).*

Esercizio 4.4 (facoltativo). *Approssimare per* $\lambda = -100$ *il valore assunto dalla soluzione* $\overline{y}$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- *Si utilizzi il metodo di Eulero esplicito con passi* $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.
- *Al variare di* h *verificare quando* $|1 + h\lambda| < 1$.
- *Stampare gli errori assoluti compiuti nell'approssimare la soluzione in* $x = 100$ *(in formato esponenziale, 1 cifra prima della virgola e 3 dopo la virgola).*

Esercizio 4.5 (facoltativo). *Fissato "N", e posti* `x0=0`, `xfin=10`, *approssimare mediante il metodo RK2*

$$y(x_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hF(x_n, u_n; h)$$

con

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)),$$

in cui

$$\gamma_1 = 1/2, \gamma_2 = 1/2, \alpha = 1, \beta = 1,$$

la soluzione "y" del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2 \cdot \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nei punti $x_k = x_0 + kh$, *con* $h = 10/N$, $k = 0, \ldots, N$.

Si eseguano due esempi in cui rispettivamente:

1. $N = 100$,
2. $N = 200$.

- *Noto che la soluzione e'* $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$, *calcolare nei due esempi gli errori assoluti compiuti nei punti* $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 8$, $x = 10$.

- *Si tabulino gli errori richiesti in formato esponenziale, con una cifra prima della virgola e 2 dopo la virgola.*