Esercizi di Laboratorio del corso di Analisi Numerica [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Esercizi del corso di Analisi Numerica.

Revisione: 1 giugno 2019

Nota. 0.1. *Di seguito si citano gli esercizi effettuati nel corso di Analisi Numerica. Per alcuni riferimenti a codici, si vedano le relative slides esposte nelle ore di laboratorio.*

1. Teoria dell'approssimazione

Esercizio 1.1. *Sapendo che l'errore in norma infinito dell'interpolante nei nodi di Chebyshev è asintoticamente del tipo $C\gamma^n$, determinare C e γ.*

Suggerimento:

- *Calcolare il rapporto tra $e_{100} \approx C\gamma^{100}$ e $e_{98} \approx C\gamma^{98}$ e dedurre γ.*
- *Nota un'approssimazione di γ, calcolare C da $C \approx e_{100}/\gamma^{100}$.*

Esercizio 1.2. *Si modifichi la precedente routine così da studiare l'approssimazione, similmente all'esempio precedente, le funzioni*

1. $f(x) = |x - 0.3|$;
2. $f(x) = \exp(x^2)$;
3. $f(x) = \exp(x)$;
4. $f(x) = \sin(x)$;
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove* $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *se* $x \neq 0$, 1 *se* $x = 0$ *(funzione predefinita in* `chebfun`*).*

- *Serve* `'splitting', 'on'`*?*

- *Qual'e' il numero di punti di Chebyshev affinchè la funzione sia approssimata alla precisione di macchina in ogni esempio?*

Esercizio 1.3. *Si modifichi la routine* `esempio1.m` *utilizzando quanto visto in* `esempio2.m`*, così da paragonare la miglior approssimante di grado* $n = 10, 20, \ldots, 50$ *con l'interpolante in* $n+1$ *nodi di Chebyshev, su*

1. $f(x) = |x - 0.3|$*;*
2. $f(x) = \exp(x^2)$*;*
3. $f(x) = \exp(x)$*;*
4. $f(x) = \sin(x)$*;*
5. $f(x) = sinc(x)$ *dove* $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *se* $x \neq 0$*,* 1 *se* $x = 0$ *(funzione predefinita in* `chebfun`*).*

- *Serve* `'splitting', 'on'`*?*
- *Negli esempi forniti è molta la differenza tra l'usare l'interpolante in nodi di Chebyshev e la miglior approssimante?*

Esercizio 1.4. *Verificare che per nodi equispaziati, unisolventi a grado* n*, per* $n = 1, \ldots, 50$ *si ha che*

$$\frac{2^{n-2}}{n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+3}}{n}$$

come stabilito in *Two results on Polynomial Interpolation in Equally Spaced Points*, *da Trefethen e Weideman, J.A.T. (65), 247-260 (1991).*

E' buona la stima asintotica $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\exp(1)\, n \log(n)}$*?*
Suggerimento:

- *Modificare l'esempio 3,*
- *ricordare il comando* `linspace`.

Esercizio 1.5 (Facoltativo). *Che errore si compie in norma* ∞ *e in norma 2, approssimando la funzione*

$$f(t) = \log(0.001 + t), \;\; t \in [0, 1]$$

con

- *polinomi algebrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun?*
- *polinomi trigonometrici di grado* 11*,* 31*,* 51 *via Chebfun (nella versione col* `'trunc'`*)?*

Quale delle due approssimazioni è migliore? Ha senso quella trigonometrica (plot!)?

- *Se* `deg` *é il grado allora* `'trunc'` *va fatto per* $N =$ *....*
- *Si noti che se* `fa` *é un oggetto chebfun di natura algebrica e* `ft` *di natura trigonometrica, allora si puó fare* `norm(fa-ft)`, `norm(fa-ft,inf)`.
- *Possibili warnings sorgono dalla versione trigonometrica di Chebfun.*
- *Versioni diverse di Matlab/Chebfun possono influenzare il risultato.*

2. Quadratura numerica

Esercizio 2.1. *Usando una opportuna formula gaussiana, con* $n = 10, 20, 30$ *punti, calcolare*

- $\int_0^{\pi} \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17}$*;*
- $\int_0^{1} x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$*;*
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284$*;*
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365$*;*
- $\int_0^{1} x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.
- *Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica.*

Esercizio 2.2 (Facoltativo). *Si calcolino per* $N = 10, 20$ *con la formula composta dei trapezi, di Cav.-Simpson e un'appropriata formula gaussiana*

$$\int_{-1}^{1} x^{20}\, dx = 2/21 \approx 0.095238095238096801 \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\, dx = e - e^{-1} \approx 2.3504023872876032 \tag{2}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx = \mathit{erf}(1) \cdot \sqrt{\pi} \approx 1.4936482656248538 \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1} 1/(1+16x^2)\, dx = 1/2 \cdot \mathit{atan}(4) \approx 0.66290883183401628 \tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-1/x^2}\, dx \approx 0.17814771178156086 \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|^3\, dx = 1/2 \tag{6}$$

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx = 2/3 \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\sqrt{1-x}\, dx \approx 1.7791436546919095 \tag{8}$$

1. *Quali delle due formule ha errori relativi inferiori?*
2. *Quali funzioni risultano più difficili da integrare numericamente?*
3. *La scelta* $N = 10, 20$ *nei singoli codici a quanti nodi corrisponde?*
4. *Suggerimento: ricordarsi che il peso* $w(x) \equiv 1$ *corrisponde ad un'opportuna scelta del peso di Jacobi.*

Esercizio 2.3 (Facoltativo). *Calcolare con una opportuna formula gaussiana basata su 11 nodi:*

1.
$$\int_{-1}^{1} x^{20}\sqrt{1-x^2}dx$$

2.
$$\int_{-1}^{1} \exp{(x^2)} \cdot (1-x)^{0.5} \cdot (1+x)^{1.5}dx$$

Nota. 2.4. *Il primo integrale, può essere calcolato* esattamente *con Mathematica, Maple (da Matlab, aiutarsi con Google) o* `quadgk` *di Matlab, una toolbox di Matlab specifica per l'integrazione numerica, con un errore assoluto di* 10^{-15}

```
>> Q = quadgk(@(x)(x.^20).*(1-x.^2).^(0.5) ,-1,1,'AbsTol',10^(-15))
Q =
   0.025160880188796
>>
```

Il secondo integrale non è integrabile col Wolfram integrator e nemmeno col calcolo simbolico di Matlab.

```
>> syms x
>> int((exp(-x.^2)).*((1-x).^(0.5)).*((1+x).^(1.5)),-1,1)
Warning: Explicit integral could not be found.
> In sym.int at 58
ans =
int(exp(-x^2)*(1-x)^(1/2)*(1+x)^(3/2),x = -1 .. 1)
```

Utilizzando la shell di Matlab e `quadgk` *con un errore assoluto di* 10^{-15}

```
>> format long;
>> I=quadgk(@(x)(exp(x.^2)).*((1-x).^(0.5)).*((1+x).^(1.5)),-1,1,...
        'AbsTol',10^(-15))
I =
   2.086318843895086
>>
```

3. Metodi iterativi

Esercizio 3.1. 1. *Si calcoli la matrice simmetrica e definita positiva* $minij_{20}$ *di ordine 20 aiutandosi con*

```
>> help gallery
```

2. *Sia* b *il vettore composto di componenti uguali a* 1, *avente lo stesso numero di righe di* P_{20}.
   - *Si risolva col metodo di Jacobi il problema* $minij_{20}x = b$, *con tolleranza di* $10^{(-6)}$, *partendo da* $x^0 = [0 \dots 0]$. *Converge?*

- *Si risolva col metodo di SOR con* $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$ *il problema* $minij_{20} x = b$*, con tolleranza di* $10^{(-6)}$*, partendo da* $x^0 = [0 \dots 0]$.
  - *Converge?*
  - *Eseguire il plot in scala semilogaritmica, avendo in ascisse* ω *e in ordinate il numero di iterazioni eseguite. Quale sembra un buon parametro da utilizzare?*
  - *Calcolare il parametro* ω *che minimizza il numero di iterazioni svolte da SOR.*

Esercizio 3.2. 1. *Si calcoli la matrice di Poisson* P_{20} *di ordine 20 aiutandosi con*

```
>> help gallery
```

2. *Sia* b *il vettore composto di componenti uguali a* 1*, avente lo stesso numero di righe di* P_{20}.
   - *Si risolva col gradiente coniugato il problema* $P_{20} x = b$*, con tolleranza di* $10^{(-12)}$*, partendo da* $x^0 = [0 \dots 0]$.
   - *Quante iterazioni servono?*
   - *E migliore questo risultato di quello ottenuto con Jacobi e Gauss-Seidel?*
   - *(Facoltativo) Applicare il gradiente coniugato alla matrice* `minij` *di ordine* 100 *e paragonare i risultati con quelli ottenuti da Jacobi, Gauss-Seidel e SOR ottimale.*

4. Autovalori

Esercizio 4.1. • *Data la matrice di Hilbert di ordine 5, ottenibile in Matlab col comando* `hilb(5)` *si calcolino col metodo delle potenze i suoi minimi e massimi autovalori in modulo.*

- *Da questi si determini il condizionamento della matrice in norma 2 e lo si confronti con* `cond(hilb(5),2)`*. Eseguire lo stesso esercizio utilizzando il metodo QR.*

5. Equazioni differenziali

Esercizio 5.1. *Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi* h *uguali rispettivamente a* 0.2*,* 0.1*,* 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \le x \le 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*

- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Per selezionati valori di x, ad esempio $x = 10$, si calcoli il rapporto con cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Esercizio 5.2. *Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson. Si risolva utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05, con tolleranza pari a 10^{-6},*

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$. Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Esercizio 5.3. *Approssimare per $\lambda = -100$ il valore assunto dalla soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

nel punto $x = 100$. A tal proposito

- *Si utilizzano i metodi di Eulero esplicito e Eulero implicito con passi $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.*
- *Al variare di h verificare quando $|1 + h\lambda| < 1$.*
- *Si osservi che la mancata convergenza a 0 di Eulero implicito è dovuta al metodo di Eulero esplicito come predittore (si veda il codice di Eulero esplicito).*

Esercizio 5.4 (Facoltativo).

1. *Implementare i metodi di Adams-Bashforth e Moulton per $p = 3$.*
2. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.
Approssimare con tali metodi la soluzione di (12) nell'intervallo $[0, 10]$, in N punti equispaziati x_n, con $N = 2, 4, 8, 16, 32$, descrivendone con un plot l'errore assoluto $\|u_n - Y_n\|_\infty$ (dove $Y_n = y(x_n)$ e u_n l'approssimazione fornita dal metodo numerico in x_n). Quali valori iniziali si considerino quelli propri della soluzione esatta $Y(x) = \tan^{-1}(x)$ nei punti richiesti.

6. Equazione di Poisson

Esercizio 6.1. *Si risolva l'equazione di Poisson nel quadrato* $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, \ \ x \in [0, \pi], \\ u(x, \pi) = 0, \ \ x \in [0, \pi], \\ u(0, y) = \sin(y), \ \ y \in [0, \pi], \\ u(\pi, y) = \exp(\pi) \sin(y), \ \ y \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{13}$$

la cui soluzione è $u(x, y) = \exp(x) \sin(y)$*, con il metodo alle differenze precedentemente descritto. Utilizzare* $n = 2, 4, \ldots, 32$.

7. Equazione del calore

Esercizio 7.1 (Facoltativo). *Eseguire gli stessi test eseguiti per Eulero esplicito col* θ*-metodo, per*

- $\theta = 0.25$,
- $\theta = 0.5$,
- $\theta = 0.75$.

Com'e' il comportamento del metodo? Simile ad Eulero esplicito o ad Eulero esplicito?