Equazioni differenziali ordinarie.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

5 maggio 2019

Metodi di Eulero esplicito in Matlab

Di seguito descriviamo i codici Matlab di

- Eulero esplicito,
- Eulero implicito,

eseguiti da Atkinson, Han, Steward.

```
function [t,y]=eulero_esplicito(t0,y0,t_end,h,fcn)

n = fix((t_end-t0)/h)+1;
t = linspace(t0,t0+(n-1)*h,n)';
y = zeros(n,1);
y(1) = y0;
for i = 2:n
  y(i) = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i-1),y(i-1));
end
```

Metodo di Eulero implicito in Matlab

```
function [t,y]=eulero_implicito(t0,y0,t_end,h,fcn,tol)
n = fix((t_end-t0)/h) + 1;
t = linspace(t0,t0+(n-1)*h,n)';
y = zeros(n,1); y(1) = y0;
for i=2:n
  yt1 = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i-1),y(i-1));
  count = 0;  diff = 1;
  while diff > tol && count < 10
    yt2 = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i),yt1);
    diff = abs(yt2-yt1); yt1 = yt2; count=count+1;
  end
  if count >= 10
   disp('Not converging after 10 steps at t = ')
   fprintf('%5.2f\n', t(i))
  end
  y(i) = yt2;
end
```

Metodo di Eulero implicito in Matlab

Osserviamo che

- la routine in questione risolve l'equazione del metodo di Eulero implicito

$$\boxed{z = u_n + hf(x_{n+1}, z)}$$

  tramite l'applicazione del metodo di punto fisso.
- quale valore iniziale del metodo di punto fisso si sceglie il valore fornito da Eulero esplicito.

Esercizio 1. Eulero esplicito

Esercizio

Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Per selezionati valori di x, ad esempio $x = 10$, si calcoli il rapporto con cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Esercizio 2. Crank-Nicolson

Esercizio

Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.

Si risolva utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05, *con tolleranza pari a* 10^{-6},

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$. *Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)*

- *l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;*
- *l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.*

Esercizio 3. Assoluta stabilità

Esercizio

Approssimare per $\lambda = -100$ *il valore assunto dalla soluzione* $\overline{y}$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \; x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- *Si utilizzano i metodi di Eulero esplicito e Eulero implicito con passi* $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.
- *Al variare di* h *verificare quando* $|1 + h\lambda| < 1$.
- *Si osservi che la mancata convergenza a* 0 *di Eulero implicito è dovuta al metodo di Eulero esplicito come predittore (si veda il codice di Eulero esplicito).*

Esercizio 4. Metodi di Adams

Facoltativo.

- *Implementare i metodi di Adams-Bashforth e Moulton per* $p = 3$.
- *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \arctan(x)$.

Approssimare con tali metodi la soluzione di (4) nell'intervallo $[0, 10]$, *in* N *punti equispaziati* x_n, *con* $N = 2, 4, 8, 16, 32$, *descrivendone con un plot l'errore assoluto* $\|u_n - Y_n\|_\infty$ *(dove* $Y_n = y(x_n)$ *e* u_n *l'approssimazione fornita dal metodo numerico in* x_n*).*

Quali valori iniziali si considerino quelli propri della soluzione esatta $Y(x) = \tan^{-1}(x)$ *nei punti richiesti.*