Cenni alla risoluzione numerica di sistemi nonlineari

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

24 maggio 2022

Problema. (Soluzione di sistemi nonlineari)

Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *si tratta di trovare gli* $\mathbf{x}^* \in \Omega$*, qualora esistenti, tali che* $f(\mathbf{x}^*) = 0$*.*

Proposito.

Ci proponiamo di introdurre dei metodi numerici per la risoluzione di tali sistemi nonlineari, talvolta scritti nella forma di punto fisso $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x})$*, ad esempio con* $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$*.*

Esempio

Si consideri l'equazione $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2}\cos(x_2), x_2 - \frac{1}{2}\sin(x_1)) = 0_{\mathbb{R}^2}$*, ovvero*

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}\cos(x_2) = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}\sin(x_1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Si verifica direttamente che ha un'unica soluzione $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2)$ *con*

$$x_1 = 0.48640515466592, \qquad x_2 = 0.23372550195872.$$

Teorema (Banach, 1922)

Sia (X, d) uno spazio metrico completo (dotato della distanza d) ed M un sottoinsieme non vuoto e chiuso di X. Se $\phi : M \to M$ è L contrattiva cioè

$$d(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) \leq L d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad L < 1,$$

allora

1. *l'equazione $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x})$ ha una ed una sola soluzione $\mathbf{x}^*$;*
2. *la successione $\mathbf{x_{k+1}} = \phi(\mathbf{x_k})$ (detta di Banach o di punto fisso o delle approssimazioni successive) converge alla soluzione $\mathbf{x}^*$ per ogni scelta del punto iniziale $\mathbf{x_0}$;*
3. *per $k = 0, 1, 2, \ldots$ si ha*

$$d(\mathbf{x_k}, \mathbf{x}^*) \leq L^k (1 - L)^{-1} d(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}), \ \textit{a priori}$$

$$d(\mathbf{x_k}, \mathbf{x}^*) \leq L (1 - L)^{-1} d(\mathbf{x_{k+1}}, \mathbf{x_k}), \ \textit{a posteriori}$$

4. *per $k = 0, 1, 2, \ldots$ si ha*

$$d(\mathbf{x_{k+1}}, \mathbf{x}^*) \leq L d(\mathbf{x_k}, \mathbf{x}^*)$$

Punto fisso per sistemi e Teorema di Banach

Teorema (Banach in $\mathbb{R}^m$)

Sia $X = \mathbb{R}^m$ (dotato della norma $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^m |x_k|^p)^{1/p}$ per $p \geq 1$, con $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,m} |x_k|$) ed M un sottoinsieme non vuoto e chiuso di $\mathbb{R}^m$. Se $\phi : M \to M$ è L contrattiva cioè

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\|_p \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p, \quad L < 1$$

1. *l'equazione $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x})$ ha una ed una sola soluzione $\mathbf{x}^*$;*
2. *la successione $\mathbf{x_{k+1}} = \phi(\mathbf{x_k})$ converge alla soluzione $\mathbf{x}^*$ per ogni scelta del punto iniziale $\mathbf{x_0}$;*
3. *per $k = 0, 1, 2, \ldots$ si ha*

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_p \leq L^k(1 - L)^{-1}\|\mathbf{x_0} - \mathbf{x_1}\|_p, \ \textit{a priori}$$

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_p \leq L(1 - L)^{-1}\|\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k}\|_p, \ \textit{a posteriori}$$

4. *per $k = 0, 1, 2, \ldots$ si ha*

$$\|\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x}^*\|_p \leq L\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_p.$$

Esempio

Il sistema (1) è equivalente a risolvere il problema di punto fisso

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\cos(x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}\sin(x_1) \end{cases} \tag{2}$$

che si scrive come $\mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$ *con* $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ *e*

$$\phi(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{2}\cos(x_2), \frac{1}{2}\sin(x_1)\right).$$

Si dimostra che ϕ *è* $L-$*contrazione con* $L = 1/2$*. Per applicare il teorema di punto fisso per sistemi basta porre* $M = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ *e osservare che*

$$\phi(M) \subseteq [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \subset M$$

in quanto $-1 \leq \cos(y) \leq 1$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Esempio punto fisso per sistemi

Mostriamo che $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *è una contrazione. Dalla formula di Taylor in* $\mathbb{R}^2$

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v_0}) + J\phi(\xi)(\mathbf{v} - \mathbf{v_0}),\ \xi \in S(\mathbf{v}, \mathbf{v_0}),\ i = 1, 2$$

con $S(\mathbf{v}, \mathbf{v_0})$ *il segmento che congiunge* $\mathbf{v}$ *con* $\mathbf{v_0}$ *e* $\phi = (\phi_1, \phi_2)$*, con* $J\phi$ *la matrice Jacobiana di* ϕ *valutata in* $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$*. Da*

$$J\phi(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & (-1/2)\sin(x_1) \\ (+1/2)\cos(x_2) & 0 \end{pmatrix}$$

essendo $\|A\|_\infty = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$*, si ha per un generico* $\tau \in \mathbb{R}^2$

$$\|J\phi(\tau)\|_\infty = \max_j \sum_i |\,(J\phi(\tau))_{i,j}\,| = \max(|(-1/2)\sin(\tau_1)|, |(+1/2)\cos(\tau_2)|) \leq \frac{1}{2}$$

Quindi $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *è una L-contrazione con* $L = 1/2$ *poiché, posto nella precedente* $\tau = \xi$*, essendo la* $\|\cdot\|_\infty$ *di tipo indotto*

$$\|\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{v_0})\|_\infty = \|J\phi(\xi)(\mathbf{v} - \mathbf{v_0})\|_\infty \leq \|J\phi(\xi)\|_\infty \|\mathbf{v} - \mathbf{v_0}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{v_0}\|_\infty.$$

Metodo Punto fisso per sistemi, in Matlab

```
function [x,flag]=punto_fisso(x0,maxit,tol,g)

% INPUT.
% x0     : PUNTO INIZIALE (VETTORE COLONNA)
% maxit  : NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI.
% tol    : TOLLERANZA CRITERIO DI ARRESTO.
% g      : EQUAZIONE DA RISOLVERE x=g(x)
% OUTPUT.
% x      : ITERAZIONI PUNTO FISSO.
% flag   : 0: TERMINAZIONE CORRETTA, 1: NON CORRETTA.

x=x0; flag=0;
for index=1:maxit
    x(:,end+1)=feval(g,x(:,end));
    if norm(x(:,end)-x(:,end-1),inf) < tol, return; end
end
flag=1;
```

```
function res=phi(v)
res=0.5*[cos(v(2)); sin(v(1))];
```

```
function demo_punto_fisso

x0=[0; 0];
maxit=1000;
tol=10^(-14);
[x,flag]=punto_fisso(x0,maxit,tol,'phi');

fprintf('\n \t * iterazioni: %3.0f',size(x,2));
fprintf('\n \t * soluzione: %1.15f %1.15f \n \n',x(1,end),x(2,end));
```

```
>> demo_punto_fisso
   * iterazioni:  24
   * soluzione: 0.486405154665921 0.233725501958722
>>
```

La successione punto fisso, definita dai punti $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$ tali che

$$x_{k+1,1} = \frac{1}{2}\cos\left(x_{k,2}\right), \quad x_{k+1,2} = \frac{1}{2}\sin\left(_{k,1}\right),$$

fornisce le seguenti iterazioni:

$x_{k,1}$	$x_{k,2}$
0.00000000000000	0.00000000000000
0.50000000000000	0.00000000000000
0.50000000000000	0.23971276930210
0.48570310513698	0.23971276930210
0.48570310513698	0.23341513183103
0.48644107261515	0.23341513183103
...	...
0.48640515466592	0.23372550195872

Supponiamo di dover risolvere $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *con* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$*.*
Porremo di seguito, per notazione, $f_i(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}))_i$*.*

La successione di Newton viene descritta come

$$\begin{cases} Jf(\mathbf{x}_k)) \cdot \mathbf{h}_{k+1} = -f(\mathbf{x}_k), \\ \mathbf{x_{k+1}} := \mathbf{x_k} + \mathbf{h}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \\ \mathbf{x_0} \textit{ assegnato} \end{cases} \tag{3}$$

dove Jf *è la matrice Jacobiana di* f *cioé se* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ *allora*

$$(Jf(\mathbf{x})))_{i,j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Si noti che ad ogni iterazione si deve risolvere il sistema lineare

$$Jf(\mathbf{x}_k)) \cdot \mathbf{h}_{k+1} = -f(\mathbf{x}_k).$$

Esempio Newton per sistemi

Proponiamo di seguito, un teorema di convergenza globale e uno di locale, in cui appare immediato capire tanto la generalitá quanto la difficoltá del verificare le rispettive ipotesi.

Teorema (Convergenza globale del metodo di Newton)

Se $f = (f_i) : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^2(K)$ *dove*

- *K è la chiusura di un aperto convesso e limitato contenente una soluzione* $\mathbf{x}^*$,
- *la Jacobiana* $JF(\mathbf{x}^*)$ *è invertibile,*
- *le iterazioni* $\mathbf{x}_n$ *siano tutte in* K,

posto $e_n = \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\|_2$, *vale la seguente stima (convergenza almeno quadratica)*

$$e_{n+1} \leq C e_n^2, \quad n \geq 0$$

con

$$C = \frac{\sqrt{m}}{2} \max_{\mathbf{x}\in K} \|(Jf(\mathbf{x}))^{-1}\|_2 \max_{i=1,\ldots,m} \max_{\mathbf{x}\in K} \|Hf_i(x)\|_2$$

dove Hf_i *è la matrice Hessiana della componente* f_i.

Teorema (Convergenza locale del metodo di Newton)

Se $f = (f_i) : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^2(K)$ *dove*

- $K = B_2(\mathbf{x}^*, r)$ *ovvero la palla chiusa centrata in* $\mathbf{x}^*$, *avente raggio* r, *relativamente alla norma euclidea* $\|\cdot\|_2$,
- $Jf(\mathbf{x}^*)$ *è invertibile in* K,
- $C = \frac{\sqrt{m}}{2} \max_{\mathbf{x}\in K} \|(Jf(\mathbf{x}))^{-1}\|_2 \max_{i=1,\ldots,m} \max_{\mathbf{x}\in K} \|Hf_i(x)\|_2$

scelto $\mathbf{x}_0$ *tale che* $e_0 < \min\{1/C, r\}$, *il metodo di Newton é convergente e vale la seguente stima dell'errore*

$$Ce_n \leq (Ce_0)^{2^n}, \quad n \geq 0.$$

Esempio

Consideriamo il precedente esempio, come $f(x) = 0$.

Posto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, *si ha* $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ *con*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 - \frac{1}{2}\cos(x_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= x_2 - \frac{1}{2}\sin(x_1). \end{aligned}$$

e inoltre

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sin(x_2) \\ -\frac{1}{2}\cos(x_1) & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Metodo Newton per sistemi, in Matlab

```
function [x, steps, flag]=newton_sistemi(x,maxit,tol,F,JF)
% INPUT.
% x       : PUNTO INIZIALE (VETTORE COLONNA).
% maxit   : NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI.
% tol     : TOLLERANZA CRITERIO DI ARRESTO.
% g       : EQUAZIONE DA RISOLVERE x=g(x)
% F        : FUNZIONE DI CUI STUDIARE GLI ZERI.
% JF      : JACOBIANA DI F.
% OUTPUT.
% x       : ITERAZIONI NEWTON.
% steps: NORMA 2 DEGLI STEP.
% flag    : 0: TERMINAZIONE CORRETTA, 1: NON CORRETTA.

flag=0; steps=[];
for index=1:maxit
    Fv=feval(F,x(:,index));  JFv=feval(JF,x(:,index));
    h=-JFv\Fv; x(:,index+1)=x(:,index)+h;
    steps(index)=norm(h,2);  if steps(index) < tol, return; end
end
flag=1;
```

```
function res=F(v)
res(1,1)=0.5*cos(v(2))-v(1); res(2,1)=0.5*sin(v(1))-v(2);
```

```
function res=DF(v)
res=[-1 -0.5*sin(v(2)); 0.5*cos(v(1)) -1];
```

Scriviamo quindi sulla shell di Matlab

```
>> format long e;
>> x=[0; 0]; maxit=1000; tol=10^(-14);
>> [x, steps, flag]=newton_sistemi(x,maxit,tol,'F','JF');
>> x(:,end)
ans =
     4.864051546659213e-01
     2.337255019587208e-01
>> steps'
ans =
     5.590169943749475e-01
     2.113171789351138e-02
     7.529280144355773e-05
     7.761579629563876e-10
                         0
>>
```

Dai risultati si evince che il metodo di Newton ha fornito i risultati esatti, partendo dal vettore nullo, in sole 5 iterazioni.

La successione di elementi $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$ definita dal metodo di Newton:

$$\begin{cases} Jf(\mathbf{x}_k)) \cdot \mathbf{h}_{k+1} = -f(\mathbf{x}_k), \\ \mathbf{x_{k+1}} := \mathbf{x_k} + \mathbf{h}_{k+1} \end{cases} \tag{5}$$

fornisce i seguenti risultati:

$x_{k,1}$	$x_{k,2}$
0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.5000000000000000	0.2500000000000000
0.4864635133551991	0.2337730769877319
0.4864051551457132	0.2337255025688199
0.4864051546659213	0.2337255019587208
0.4864051546659213	0.2337255019587208

Esercizio

Si calcoli la soluzione del sistema nonlineare

$$\begin{aligned} x_1 &= \arctan(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_2)/10 \\ x_2 &= \cos(x_1/4) + \sin(x_2/4) \end{aligned} \tag{6}$$

con il metodo di punto fisso e di Newton.

Convergono entrambi, qualora l'origine sia il punto iniziale?