Approssimazione e interpolazione con polinomi algebrici [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Densitá. Legame tra densitá e migliore approssimazione (con dimostrazione). Teorema di approssimazione di Weierstrass. Teorema di Weierstrass del massimo e minimo di funzioni continue in compatto. Continuitá funzione distanza (con dimostrazione). Esistenza dell'elemento di miglior approssimazione in sottospazi di dimensione finita (con dimostrazione). Teorema di equioscillazione di Chebyshev. Algoritmo di Remez. Qualitá della miglior approssimazione in tre esempi. Modulo di continuitá (caso Lipschitziano e Holderiano). Teoremi di Jackson per funzioni continue. Teoremi di Jackson per funzioni regolari. Errori di miglior approssimazione per funzioni analitiche. Polinomi di Chebyshev e loro zeri. Costanti di Lebesgue come indicatori di stabilitá. Costanti di Lebesgue come norma di operatori di interpolazione. Errore di interpolazione relativamente errore di miglior approssimazione e costanti di Lebesgue. Alcuni asintotici di costanti di Lebesgue. Confronto di Remez e interpolazione in nodi di Chebyshev per varie funzioni. Calcolo delle Costanti di Lebesgue per Chebyshev e nodi equispaziati. Confronti con alcune stime teoriche.

Revisione: 12 marzo 2020

1. Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n =< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado n, aventi come noto dimensione $N_n = n + 1$.

Risulta evidente che se $S_n \equiv \mathbb{P}_n$ si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

Inoltre se $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è lo spazio normato delle continue in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

si ha che $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_n \subseteq (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Definizione 1.1 (Densità (in spazi normati)). *Un insieme S si dice denso in uno spazio normato X se per ogni $x \in X$, fissato $\epsilon > 0$, esiste $s \in S$ tale che $\|x - s\| < \epsilon$.*

Più in generale, in spazi topologici,

Definizione 1.2 (Densità (in spazi topologici)). *Un insieme S si dice denso in uno spazio topologico X, se per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{s_n\}$ di elementi di S tale che $s_n \to x$.*

Definizione 1.3 (Densità (in spazi topologici)). *Sia X uno spazio topologico. Un insieme $S \subseteq X$ si dice denso in X, se la chiusura di S è X (per la topologia di X).*

Teorema 1.4. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio funzionale normato e*

$$\emptyset \neq S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

una successione crescente di sottoinsiemi di X. Allora

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

se e solo se $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ è denso in X.

Dimostrazione 1.5. $\Rightarrow$ *Supponiamo sia $E_n(f) = \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ per ogni $f \in X$. Sia $f \in X$ e sia fissato un arbitrario $\epsilon > 0$.*

Allora per un qualche n si ha $E_n(f) < \epsilon$, e quindi dalle proprietà dell'estremo inferiore esiste $p_n \in S_n$ tale che $\|p_n - f\| \leq \epsilon$.

Di conseguenza per ogni $\epsilon > 0$ esiste un certo $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ tale che $\|p - f\| \leq \epsilon$, cioè $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ è denso in X.

$\Leftarrow$ Viceversa sia $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ denso in X ed $f \in X$.

Poiché

$$\emptyset \neq S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

la successione $\{E_n(f)\}_n$ è decrescente e quindi ammette limite.

Essendo $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ denso in X, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ tale che $\|f - p\| \leq \epsilon$. Se in particolare $p \in S_{n^*}$ allora per $n \geq n^*$ si ha $E_n(f) \leq \epsilon$.

Quindi per $\epsilon > 0$ arbitrario, essendo la successione $\{E_n(f)\}$ decrescente, si ha $\lim_n E_n(f) \leq \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ cioè

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0.$$

$\square$

Nota 1.6. *Osserviamo che essendo $S_n \neq \emptyset$, necessariamente esiste $p_n^* \in S_n$. Sia $A = \{\|p_n - f\| : p_n \in S_n\}$.*

Il teor. dell'estremo inferiore asserisce che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore.

Di conseguenza A è inferiormente limitato e quindi esiste

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|.$$

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densità.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [6, p.107].

Teorema 1.7 (Weierstrass, 1885, (ma anche Runge 1885)). *Ogni funzione continua in [a, b] compatto è limite uniforme di una successione di polinomi.*

Tale Teorema è equivalente a dire che $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_n$ è denso in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ e quindi dal Teorema 1.4 deduciamo che se $f \in C([a,b])$ allora $E_n(f) \equiv \inf_{p_n\in\mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \overset{n}{\to} 0$.

Miriamo a mostrare l'esistenza di un elemento di miglior appross., sotto particolari condizioni. Osserviamo che (cf. [7, p.151])

Teorema 1.8 (Weierstrass (1860) (ma anche Bolzano (1830))). *Una funzione continua $f : S \to \mathbb{R}$, con S sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono x_{min} ed x_{max} tali che*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

per ogni $x \in S$.

Nota 1.9. *Il teorema fu scoperto da Bolzano e in seguito riscoperto da Weierstrass.*

Non lo si confonda con il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema 1.10 (Bolzano-Weierstrass). *In uno spazio euclideo finito dimensionale, ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.*

Inoltre (cf. [7, p.150])

Lemma 1.11. *In uno spazio normato X di dimensione finita, un suo sottinsieme S è compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Ricordiamo che

Definizione 1.12. *Un sottoinsieme S di uno spazio metrico X si dice compatto se e solo se ogni successione di punti possiede una sottosuccessione che converge ad un punto di S.*

Lemma 1.13. *Sia X uno spazio normato e sia $f \in X$. Sia $S \subset X$ aperto e $d(f,\cdot) = \|f - \cdot\|$. La funzione $d(f,\cdot)$ è continua in ogni punto di S.*

Dimostrazione 1.14. *Osserviamo che se $x, y \in X$ allora*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Infatti, siano $x, y \in X$, e vista la loro arbitrarietà non è restrittivo supporre $\|x\| \geq \|y\|$. Dalla disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \Leftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|. \end{aligned}$$

Intendiamo mostrare che la funzione $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ è continua nell'aperto S cioè

- per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta(\epsilon) > 0$, tale che se $|x - y| \leq \delta(\epsilon)$, $x, y \in S$, allora $\|d(f, x) - d(f, y)\| \leq \epsilon$.

Fissato $\epsilon > 0$, $x \in S$, sia $\delta(\epsilon) = \epsilon$. Allora se $y \in S$, $\|x - y\| \leq \epsilon$, visto che $|\|x_1\| - \|x_2\|| \leq \|x_1 - x_2\|$ pure per $x_1 = f - x$, $x_2 = f - y$,

$$\begin{aligned} |d(f, x) - d(f, y)| &= |\|f - x\| - \|f - y\|| \\ &\leq \|(f - x) - (f - y)\| = \|x - y\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

e quindi la funzione $d(f, \cdot)$ è continua in $x \in S$. □
Il lemma precedente serve a mostrare la seguente proposizione.

Teorema 1.15. *Sia S un sottospazio vettoriale di uno spazio normato X. Si supponga che*

- *S sia di dimensione finita,*
- *f sia un certo elemento di X.*

Allora esiste $s^* \in S$, detto di miglior approssimazione *di f in S, tale che*

$$\|f - s^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

Dimostrazione 1.16.
- *L'elemento 0 dello spazio normato X appartiene certamente in ogni suo sottospazio, e quindi pure in S. Così sicuramente*

$$E(f) \equiv \inf_{p \in S} \|p - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|.$$

- *La funzione $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ è continua in S.*
- *Essendo lo spazio S di dimensione finita, la palla $B_S(f, \|f\|) = \{p \in S : \|p - f\| \leq \|f\|\}$ centrata in f e avente raggio $\|f\|$ essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta.*

Quindi per il teorema di Weierstrass la funzione $d(f, \cdot)$ ha minimo p^* in $B_S(f, \|f\|)$ e di conseguenza in $E(f) = \|f - p^*\|$.

Corollario 1.17. *Per ogni $k \geq 0$, fissata $f \in (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ esiste un polinomio $p_k^* \in \mathbb{P}_k$ di miglior approssimazione.*

Riguardo l'unicità di tale p_k^* (cf.[2], p.112, [4], [6, p.149], [3, p.3]).

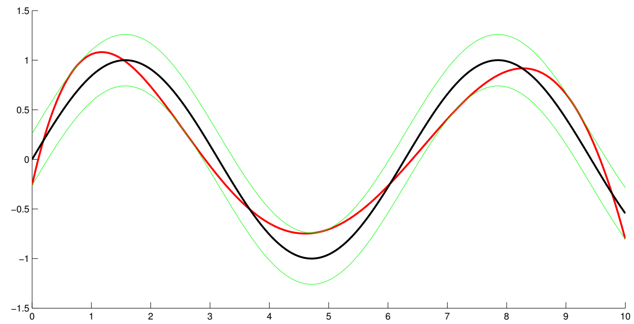

Figura 1: Equioscillazione: in nero $\sin(x)$ in $[0, 10]$, in rosso il polinomio di miglior approssimazione p_5^* di grado 5, in verde le funzioni $f \pm E_n(f)$. Si notino le 7 intersezioni dell'approssimante p_5^* con il grafico di $f \pm E_n(f)$.

Teorema 1.18 (di equioscillazione (Chebyshev, ≈ 1850)). *Sia $f \in C([a, b])$ con $[a, b]$ limitato e $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico elemento $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono $n + 2$ elementi $a \leq x_0 < \ldots < x_{n+1} \leq b$ tali che*

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \|f - p_n^*\|_\infty, \quad j = 0, 1, \ldots, n + 1$$

con $\sigma = 1$ oppure $\sigma = -1$.

Il calcolo del polinomio $p^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione di una funzione $f \in C([a, b])$ non è semplice.

- L'algoritmo di Remez, scoperto nel 1934, ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice (cf. [3, p.12]) .
- Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [5]). Il relativo comando si chiama `remez`.

Digitando sulla shell di Matlab

```
1 >>deg=10;
2 >> x=chebfun('x',[-5 5]);
3 >> f=1./(1+x.^2);
4 >>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in p il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della funzione di Runge $1/(1 + x^2)$ nell'intervallo $[-5, 5]$ (come stabilito dalla seconda riga).

Dalla Tabella, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a paritá di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al $|x - 4|$ e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante.

Queste vengono fornite dai seguenti **teoremi di Jackson** [4, p.142], [1, p.224].

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $\|x-4\|$	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e-01$	$1.61e-01$	$1.08e-01$
10	$6.59e-02$	$8.40e-02$	$7.03e-04$
15	$2.98e-02$	$5.68e-02$	$2.31e-08$
20	$9.04e-03$	$4.28e-02$	$6.69e-12$
25	$4.08e-03$	$3.43e-02$	$2.33e-15$
30	$1.24e-03$	$2.86e-02$	$-$
35	$5.60e-04$	$2.46e-02$	$-$
40	$1.70e-04$	$2.15e-02$	$-$
45	$7.68e-05$	$1.91e-02$	$-$
50	$2.33e-05$	$1.72e-02$	$-$
55	$1.05e-05$	$1.56e-02$	$-$
60	$3.20e-06$	$1.43e-02$	$-$
65	$1.44e-06$	$1.32e-02$	$-$
70	$4.38e-07$	$1.23e-02$	$-$
75	$1.98e-07$	$1.14e-02$	$-$
80	$6.01e-08$	$1.07e-02$	$-$
85	$2.71e-08$	$1.01e-02$	$-$
90	$8.24e-09$	$9.51e-03$	$-$
95	$3.72e-09$	$9.00e-03$	$-$
100	$1.13e-09$	$8.55e-03$	$-$

Tabella 1: Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior approssimazione relativamente a $1/(1+x^2)$, $|x-4|$ e $\sin(x)$ in $[-5, 5]$.

1.1. Modulo di continuità

Definizione 1.19 (Modulo di continuità). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La quantità*

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

si chiama modulo di continuità di f.

Nota 1.20. *Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è L-lipschitziana, cioè*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \;\; x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta) \;\; &:= \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} L|x - y| = L\delta. \end{aligned}$$

Non è difficile mostrare che se f è L-lipschitziana in $[a, b]$ allora è pure continua in $[a, b]$.

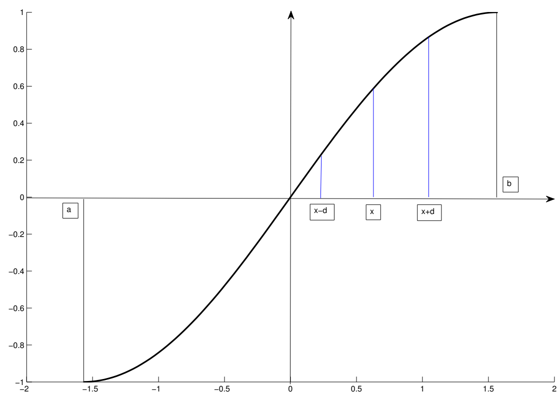

Figura 2: Fissato un certo x si calcola il massimo di $|f(x_1) - f(x_2)|$ con $x_1, x_2 \in [x-d, x+d]$. Quindi si calcola l'estremo superiore di questa quantità al variare di $x \in [a, b]$, ottenendo $\omega(f, d)$.

Nota 1.21. *Sia $[a, b]$ chiuso e limitato. Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è tale che $f \in C^{(1)}([a, b])$ allora è L-lipschitziana con $L = \max_{x\in[a,b]} |f^{(1)}(x)|$.*

Nota 1.22. *Se la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è α-holderiana ($\alpha \in (0, 1)$), cioè*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^{\alpha},\ \ x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x,y\in[a,b],\ |x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)| \\ &\le \sup_{x,y\in[a,b],\ |x-y|\le\delta} L|x - y|^{\alpha} = L\delta^{\alpha}.\end{aligned}$$

Teorema 1.23 (Jackson, 1912). *Per ogni $n \ge 1$ e per ogni $f \in C([a, b])$ esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che*

$$E_n(f) = \inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \le M\,\omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove $\omega(f, \cdot)$ è il modulo di continuità della funzione f su [a,b]

Corollario 1.24. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è L-lipschitziana, allora esiste una costante M^* indipendente da n, a, b tale che*

$$E_n(f) = \inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \le M^* \frac{b-a}{n}.$$

Teorema 1.25 (Jackson). *Se $f \in C^k([a, b])$, $k \ge 0$ si ha per ogni $n > k$*

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \le M^{k+1} \frac{(b-a)^k}{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}\omega\left(f^{(k)}, \frac{b-a}{n-k}\right).$$

Corollario 1.26. *Se $f^{(k)} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k > 0$ è α-holderiana (di costante L), allora esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che*

$$E_n(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^k}{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)} \cdot L \cdot \left(\frac{b-a}{n-k} \right)^{\alpha}.$$

Teorema 1.27 (Jackson). *Se $f \in C^k([a,b])$, ed $f^{(k)}$ è α holderiana, cioè*

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, x, y \in [a,b]$$

per qualche $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$.

Allora esiste una costante d_k indipendente da f e n per cui

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty} \leq \frac{M\, d_k}{n^{k+\alpha}},\ n \geq 1.$$

Ricordiamo che (cf. [6, p.12]).

Definizione 1.28. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione del piano complesso e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \Omega$, f si dice analitica in z_0 se ha una rappresentazione della forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di z_0.

Definizione 1.29. *Una funzione si dice analitica in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se è analitica in ogni punto di Ω.*

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\exp(z)$. La funzione di Runge $1/(1+z^2)$ è analitica in ogni regione non contenente $-i$ e $+i$.

Teorema 1.30. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[a,b]$, allora esiste $\theta \in (0,1)$ tale che*

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n).$$

Teorema 1.31 (Bernstein). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{n \to \infty} (E_n(f))^{1/n} = 0$$

se e solo se f è intera (cioè si può scegliere $\Omega = \mathbb{C}$).

Nota 1.32. *Si osservi che nel precedente teorema si dice che se la funzione f è intera allora la miglior approssimante ha asintoticamente un errore inferiore rispetto al caso in cui f sia analitica in un aperto strettamente contenuto nel piano complesso.*

Nota 1.33 (Convergenza della funzione di Runge). *Per quanto visto, la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$, con $x \in [-5,5]$ è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[-5,5]$ (si noti che possiede i soli poli in $-i$ e i) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che $E_n(f) = O(\theta^n)$ con $\theta \approx 0.814$.*

Nota 1.34 (Convergenza della funzione $\sin$). *La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di $f(x) = \sin(x)$, con $x \in [-5,5]$ è molto rapida. In effetti $\sin(z)$ è intera.*

Nota 1.35 (Convergenza della funzione $f(x) = |x-4|$). *Da $||x-4| - |y-4|| \leq |x-y|$ e dal fatto che per $x \leq 4$ si ha $f(x) = 4 - x$ mentre per $x > 4$ si ha $f(x) = x - 4$ si vede facilmente che per $\delta \leq 5$*

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x,y\in[-5,5],\,|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)| = \delta$$

Così, dal Teorema di Jackson, per qualche M,

$$E_n(f) = \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right) = M\frac{b-a}{n} = \frac{10M}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti $a = -5$, $b = 5$

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{10}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di $E_n(f)$ a 0, rispetto $E_n(f) \approx 0.814^n$ dell'esempio di Runge.

2. Alcune note sui polinomi di Chebyshev (~ 1850)

Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con $x \in [-1,1]$ (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno, T_n non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$, $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$. Dalle formule trigonometriche di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \\ \cos((n-1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

sommando membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

Posto $\theta = \arccos(x)$ si ha

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

poiché

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

Di conseguenza, per ricorrenza, essendo

- $T_0(x) = 1$,
- $T_1(x) = x$,

si deduce che T_n è un polinomio, detto di Chebyshev, di grado n e che inoltre per $n > 0$ è del tipo $T_n(x) = 2^{n-1}\, x^n + \cdots$.

Gli zeri x_k del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$, per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$
$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$
$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev sono

- esattamente n,
- distinti,
- nell'intervallo $(-1, 1)$.

3. Costanti di Lebesgue

Sia $f \in C([a, b])$, con $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \ldots, n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$. Come è noto, indicato con L_k il k-simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_k - x_j).$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con $\tilde{f}_k$.

Quindi il polinomio interpolatore è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k L_k(x)$. Essendo $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$ abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k - \tilde{f}_k||L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k|\right) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k|\right) \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k|\right) \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k|\right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero Λ_n dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

Il valore Λ_n è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti $x_0, \ldots, x_n$ (cf. [11]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [4, p.139-140]).
Ricordiamo che se $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, $A : X \to Y$ è un **operatore lineare limitato** se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito.

Il numero reale $\|A\|$ si chiama **norma dell'operatore lineare** A (cf. [8, p.224]).

Nota 3.1. *Essendo, per ogni $\tilde{x} \in X$, $\tilde{x} \neq 0$.*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \\ &\geq \frac{\|A\tilde{x}\|_Y}{\|\tilde{x}\|_X}\end{aligned}$$

deduciamo facilmente che $\|A\|$ è la più piccola costante C per cui

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

per ogni $x \in X$.

Si osservi che qualsiasi sia C, l'asserto è banalmente vero per $\tilde{x} = 0$.

Si può mostrare che se

$$\mathcal{L}_n : (C([a,b]), \infty) \to (C([a,b]), \infty)$$

è l'operatore (lineare e limitato) che associa a $f \in C([a,b])$ il suo polinomio di interpolazione p_n nei nodi $x_0, \ldots, x_n$ allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Nota 3.2. *Si osservi che mentre nella norma di un operatore lineare e limitato è presente un* $\sup$*, nella definizione precedente si dimostra che effettivamente è un* $\max$*.*

Teorema 3.3. *Se $f \in C([a,b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \ldots, x_n$ si ha*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \tag{1}$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

Dimostrazione 3.4. *Se $f \in \mathcal{P}_n$, allora $f \equiv p_n \equiv p_n^*$, con p_n^* elemento di miglior approssimazione e quindi l'asserto è ovvio.*

Se invece $f \notin \mathcal{P}_n$, allora $f - q_n \neq 0$, per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$.

Osserviamo che

- *Per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$, è $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$, in quanto l'unico polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti un polinomio di grado n è il polinomio stesso:*
- $\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n$.

Poichè $f - q_n \in C([a,b])$ non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \tag{2}$$

e di conseguenza,

$$\|p_n - q_n\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty \;\; q_n \in \mathcal{P}_n. \tag{3}$$

Dimostrazione 3.5. *Essendo quindi*

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \tag{4}$$

osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da $f - p = (f - q) + (q - p)$ e (4)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q_n - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \quad (5)$$

L'asserto si ottiene scegliendo quale $q_n \in \mathcal{P}_n$ il polinomio di miglior approssimazione $q_n^* \in \mathcal{P}_n$, in quanto $E_n(f) = |f - q_n^*|$.

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

Figura 3: Henri Lebesgue (1875-1941).

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n + 1$ punti nell'intervallo $[-1, 1]$ (cf. [9]):

- punti equispaziati: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)
$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$
- punti di Chebyshev: corrispondono a $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$ dove $k = 1, \ldots, n + 1$; si dimostra che asintoticamente
$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n + 1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right)\right) + O\left(\frac{1}{(n + 1)^2}\right)$$
dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [10]);
- punti di Chebyshev estesi: sono definiti da $\frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$ dove $k = 1, \ldots, n + 1$; si dimostra che asintoticamente
$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n + 1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{1}{\log(n + 1)}\right);$$

- configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Usando Matlab, notiamo quanto siano differenti Λ_n per $n = 5, 10, \ldots, 50$.

```
>> n=(5:5:50)'; %  GRADI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n)); %  EQSP.
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) ); %  CHEB.
>> [s t]
ans =
   2.9258e+000   3.1291e+000
   3.2720e+001   3.5150e+000
   5.9352e+002   3.7536e+000
   1.2877e+004   3.9267e+000
   3.0679e+005   4.0626e+000
   7.7425e+006   4.1746e+000
   2.0316e+008   4.2698e+000
   5.4825e+009   4.3526e+000
   1.5112e+011   4.4259e+000
   4.2351e+012   4.4915e+000
>>
```

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

[1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

[2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.

[3] D. Bini, *Approssimazione minimax*, `http://www.dm.unipi.it/~bini/Didattica/IAN/appunti/approx.pdf`

[4] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.

[5] Chebfun, `http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972-chebfun`

[6] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

[7] D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.

[8] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.

[9] S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami.

[10] Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni.

[11] Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation).