Miglior approssimazione in spazi euclidei

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

17 marzo 2018

Spazi euclidei

Definizione (Spazio euclideo)

Uno spazio vettoriale E dotato di un prodotto interno $(\cdot, \cdot)$, cioè una funzione reale (o complessa) definita sulle coppie $x, y \in E$ con le seguenti proprietà

1. $(x, x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$*; inoltre* $(x, x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*
2. $(x, y) = (y, x)$ *per ogni* $x, y \in E$*;*
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ *per ogni* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(o* $\lambda \in \mathbb{C}$ *se* $(\cdot, \cdot)$ *complessa);*
4. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ *per ogni* $x, y, z \in E$*.*

si dice spazio euclideo.

A partire dal prodotto interno si può definire lo spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ ponendo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Spazi euclidei

Vediamo alcuni esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare, è uno spazio euclideo; se $e_1, \ldots, e_n$ è una base ortonormale, cioè per cui $(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}$ (dove al solito $\delta_{j,k}$ è il delta di Kronecker), allora ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_n e_n, \;\; c_k = (x, e_k).$$

Infatti, moltiplicando ambo i membri di x per e_k si ha per la bilinearità del prodotto scalare

$$(x, e_s) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_n e_n, e_s\right) = \sum_{k=1}^{n} c_n (e_n, e_s) = c_s (e_s, e_s) = c_s.$$

Spazi euclidei

- lo spazio $C([a,b])$ delle funzioni continue nel compatto $[a,b]$, dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

è uno spazio euclideo, cf. [8, p.145].

- lo spazio $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $[a,b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]), dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

è uno spazio euclideo *completo*, cioè ogni successione di Cauchy è convergente cf. [8, p.145].

Spazi euclidei

- lo spazio $L^2_{\mathbb{C}}([a,b])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ con $[a,b]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]) , dotato del prodotto scalare

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

  è uno spazio euclideo *completo*, cf. (cf.[4, p.5]).

  Ricordiamo che se $z=a+i\cdot b$ allora $\overline{z}=a-i\cdot b$ e $\overline{z}$ si chiama il coniugio di z.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Pitagora)

Sia E uno spazio euclideo, e siano $f, g \in E$ tali che $(f, g) = 0$ (cioè f e g sono ortogonali). Allora $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Dimostrazione.

Essendo $(f, g) = 0$, dalla bilinearità del prodotto interno,

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (g,f) + (f,g) + (g,g) \\ &= (f,f) + 0 + 0 + (g,g) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 \end{aligned}$$

△

Notazione.

Denoteremo con $< \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$ lo spazio vettoriale definito da $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Proiezione ortogonale)

Sia $f \in E$, E spazio euclideo e $\{\phi_j\}_{1,\ldots,N}$ un sistema finito di elementi di E lin. indipendenti. Allora $f^* = \sum_{1,\ldots,N} c_j^* \phi_j$ è la soluzione del problema

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in <\phi_k>_{k=1,\ldots,N}} \|f - g\|_2$$

dove i coefficienti c_j^* verificano le cosidette equazioni normali

$$\sum_{k=1}^{N} (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f),\ j = 1, \ldots, N.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^* - f$ è ortogonale a tutti gli ϕ_k, con $k = 1, \ldots, N$ o equivalentemente

$$(f^*, \phi_k) = (f, \phi_k),\ k = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Dimostrazione.

- *Supponiamo che per un certo* $f^* = \sum_{1,\ldots,N} c_j^* \phi_j$ *si abbia che* $f^* - f$ *sia ortogonale a tutti i* ϕ_k *(e quindi a ogni loro combinazione lineare).*
- *Supponiamo* $f^\circ \neq f^*$ *sia l'elemento di migliore approssimazione.*

Allora, visto che $f - f^*$ *è ortogonale a* $f^* - f^\circ \in <\phi_k>$, *utilizzando il teorema di Pitagora*

$$\begin{aligned} \|f - f^\circ\|^2 &= \|(f - f^*) + (f^* - f^\circ)\|^2 \\ &= \|f - f^*\|^2 + \|f^* - f^\circ\|^2 > \|f - f^*\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

e quindi f° *non può essere l'elemento di miglior approssimazione.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Di conseguenza se $f^* \in < \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$ *e* $f^* - f$ *è ortogonale a tutti i* ϕ_k *allora* f^* *è la miglior approssimazione di* f *in* $< \phi_k >_{k=1,\ldots,N}$. *Rimane allora da mostrare che le condizioni di ortogonalità*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} c_j^* \phi_j - f, \phi_k \right) = 0, \;\; k = 1, \ldots, N$$

sono soddisfatte per un qualche (unico!) $c^* = (c_j)_{j=1,\ldots,N}$.

Questo problema è equivalente alla esistenza della soluzione del sistema di equazioni normali

$$\sum_{k=1}^{N} (\phi_j, \phi_k) c_k^* = (\phi_j, f), \; j = 1, \ldots, N \quad (3)$$

cioè che la matrice $G = (G_{i,j}) = ((\phi_i, \phi_j))$ *è non singolare.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Si vede facilmente che la matrice (di Gram) G è definita positiva e quindi non singolare.

Infatti, se $v = (v_i) \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, $G_{i,j} = (\phi_i, \phi_j)$, $u = \sum_i v_i \phi_i \neq 0$

$$\begin{aligned} v^T \cdot G \cdot v &= v^T \cdot \overbrace{(\sum_j v_j \overbrace{(\phi_i, \phi_j)}^{G_{i,j}})}^{vettore!!}{}_i = v^T \cdot \overbrace{(\phi_i, \sum_j v_j \phi_j)_i}^{vettore!!} \\ &= \sum_i v_i (\phi_i, u) = (\sum_i v_i \phi_i, u) = (u, u) > 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste f^*, di miglior approssimazione, ed è tale che $f^* - f$ è ortogonale a ϕ_k per $k = 1, \ldots, N$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Osserviamo ora che se non si possiede una base ortogonale $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ *allora per ottenere l'elemento di miglior approssimazione, bisogna*

- *Disporre dei prodotti scalari* (ϕ_j, ϕ_k) *per* $j, k = 1, \ldots, N$ *e di* (ϕ_j, f) *per* $j = 1, \ldots, N$.
- *Con i valori* (ϕ_j, ϕ_k) *si forma la matrice simmetrica (e definita positiva!) di Gram le cui componenti sono* $G_{j,k} = (\phi_j, \phi_k)$,
- *con* $b_j = (\phi_j, f)$ *si definisce il termine noto* b *del sistema* $Gc = b$,
- *si risolve quindi tale sistema lineare, la cui soluzione fornisce le componenti* (c_j^*) *dell'elemento di miglior approssimazione* $\sum_j c_j^* \phi_j$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Se invece disponiamo di una base ortogonale $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ *allora il calcolo della miglior approssimazione non richiede la soluzione del sistema delle equazioni normali, bensi' da*

$$c_k^* = \frac{(\phi_k, f)}{(\phi_k, \phi_k)}$$

il solo calcolo di alcuni prodotti interni e N divisioni.

Inoltre si noti che se $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ *è un sistema ortogonale, allora*

- *i coefficienti di Fourier* c_j^* *sono independenti da* N*;*
- *tale indipendenza offre il vantaggio che se è necessario aumentare il numero totale di parametri* c_j^**, non è necessario ricalcolare quelli precedentemente ottenuti.*

Esempio

Un caso importante è quello in cui $\{\phi_j\}_{j=1,\ldots,N}$ *è un sistema ortogonale, cioè*

$$(\phi_j, \phi_k) = c_j \delta_{j,k}, \;\; c_j \neq 0,$$

dove al solito $\delta_{j,k}$ *denota il delta di Kronecker; allora i coefficienti* c_j^* *(detti in questo caso di Fourier) sono calcolabili più semplicemente con la formula*

$$c_j^* = \frac{(f, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)}, \;\; j = 1, \ldots, N.$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Problema.

A questo punto supponiamo che sia $S_0 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots \subseteq E$. *Ci si domanda se per una qualsiasi* $f \in E$ *si abbia che* $\lim_n E_n(f) = 0$. *Abbiamo visto che questo equivale a stabilire che* $\cup_n S_n$ *è denso in* E.

Al momento non abbiamo detto nulla riguardo una possibile base dello spazio euclideo E.

- *Cosa serve richiedere ad* E *perchè esista una base, magari con cardinalità numerabile?*
- *Come ottenere basi ortonormali da una base arbitraria?*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Definizione (Separabile)

Uno spazio euclideo E si dice separabile se e solo se contiene un sottinsieme $S \subseteq E$ denso e numerabile, cf. [8, p.48].

Teorema

Uno spazio euclideo separabile ha una base ortonormale $\{\phi_k\}_k$ finita o numerabile, cioè tale che $(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}$ e se $x \in E$ allora si può scrivere formalmente

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k$$

per certi $\{c_k\}$, intendendo che $\lim_n \|x - \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k\| = 0$.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Inoltre vale il seguente teorema, basato sull'algoritmo di Gram-Schmidt (cf. [4, p.165]),

Teorema (Ortogonalizzazione)

Siano $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ un insieme numerabile di elementi linearmente indipendenti di uno spazio euclideo E. Allora E contiene un insieme di elementi $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,n,\ldots}$ tale che

1. *il sistema $\{\phi_n\}$ è ortonormale (cioè $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{m,n}$, dove $\delta_{m,n}$ è il delta di Kronecker);*
2. *ogni elemento ϕ_n è una combinazione lineare di $f_1, \ldots, f_n$;*
3. *ogni elemento f_n è una combinazione lineare di $\phi_1, \ldots, \phi_n$.*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Si osservi che

- *l'insieme di partenza $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ non deve essere necessariamente finito, come di solito viene spesso richiesto nell'algoritmo di ortogonalizzazione di matrici;*
- *l'insieme $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ non deve essere necessariamente finito;*
- *se lo spazio euclideo ha una base numerabile formata da elementi linearmente indipendenti $f_1, \ldots, f_n, \ldots$, allora ha pure una base ortonormale.*

Definizione (Serie di Fourier)

Se $f \in E$,

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

e $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,\infty}$ *è una successione di elementi ortonormali di* E*, la serie (formale)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k$$

è chiamata serie di Fourier di f.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Definizione (Chiuso)

Sia

$$\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$$

una successione di elementi ortonormali di uno spazio vettoriale normato X*. Se ogni elemento* $f \in X$ *può essere scritto formalmente come serie di Fourier allora l'insieme* $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,}$ *si dice chiuso in* X*.*

Problema.

- *Quali proprietà ha l'elemento di miglior approssimazione?*
- *Cosa bisogna assumere perchè la serie di Fourier di* f *converga a* f*?*

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Teorema (Bessel-Parseval)

Sia $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ una successione di elementi ortonormali di uno spazio euclideo E e sia $f \in E$. Allora

- *L'espressione*

  $$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k\|$$

  ha il minimo per

  $$a_k = c_k = (f, \phi_k), \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

  ed è uguale a

  $$\sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2}.$$

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

- *Vale la disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

- *Vale l'uguaglianza di Parseval*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

se e solo se l'insieme $\{\phi_k\}_{k=1,2,\ldots,}$ *è chiuso in* E.

Sull'elemento di miglior approssimazione in spazi euclidei

Nota.

Osserviamo che

- *la soluzione al problema di miglior appross. in norma $\|\cdot\|$ esiste ed è unica: per ottenerla basta calcolare i coefficienti di Fourier.*
- *se $\{c_k\}_{k=1,\ldots,n}$ determina l'elemento di miglior approssimazione di f rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare in $S_n = <\phi_1, \ldots, \phi_n>$, allora*

$$\lim_n \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\| = \lim_n \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2} = 0$$

in virtù dell'uguaglianza di Parseval.

Polinomi trigonometrici reali

Definizione (Polinomi trigonometrici)

Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ dei polinomi trigonometrici di grado n è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni

$$\begin{aligned}
\phi_0^*(x) &\equiv 1 \\
\phi_{2k-1}^*(x) &\equiv \cos(kx),\ k = 1, \ldots, n \\
\phi_{2k}^*(x) &\equiv \sin(kx),\ k = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Polinomi trigonometrici reali

Osserviamo che per $n = 1, 2, \ldots$, essendo per le formule di Werner

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

necessariamente (applicando la formula di Werner nel primo e quarto punto)

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)+1}{2} dx = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(nx))\, dx = 2\pi - \pi = \pi$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx)\, dx = 0$, (integranda dispari);
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = 0, m \neq n$.

Polinomi trigonometrici reali

Inoltre per $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sin(nx) \cdot \sin(mx) = \frac{\cos((n+m)x) - \cos((n-m)x)}{2}$$

implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)\, dx = 0, m \neq n$$

in quanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}.$$

Polinomi trigonometrici reali

Sia $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ in $[-\pi, \pi]$ compatto e tali che $|f|^2$ sia integrabile (cf.[4, p.5]) . Sia tale spazio dotato del prodotto scalare $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$.

- Per quanto visto
$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \ldots$$
è una succ. ortonorm. di funzioni in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$.
- Si dimostra che le $2n + 1$ funzioni
$$\phi_0(t) = 1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \phi_{2n-1}(t) = \cos(nt)/\sqrt{\pi},\ \phi_{2n}(t) = \sin(nt)/\sqrt{\pi}$$
formano una base ortonorm. di $\mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$ dotato del prod. scal. di $L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$.
- Si vede che $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,2n}$ è chiuso in $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ (cf. [4, p.267]).

Polinomi trigonometrici reali

Dalle precedenti osservazioni e del teorema di Bessel-Parseval:

Teorema

Consideriamo la successione di elementi ortonormali

$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}, \ldots$$

di $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$*. Allora i coefficienti di Fourier che determinano l'elemento di miglior approssimazione corrispondono a*

- $c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx/\sqrt{2\pi}$,
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \;\; k = 1, 2, \ldots;$
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \;\; k = 1, 2, \ldots$

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Polinomi trigonometrici reali

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \right)^2 + $$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \right)^2 = \pi \|f\|^2$$

(cf. [11]).

Polinomi trigonometrici complessi

Definizione (Polinomi trigonometrici complessi)

Lo spazio vettoriale $\mathbb{T}_n^{\mathbb{C}}$ *dei polinomi trigonometrici complessi di grado* n *è costituito dalle combinazioni lineari delle funzioni*

$$\begin{aligned} \phi_0^*(x) &\equiv 1 \\ \phi_{2k-1}^*(x) &\equiv \exp\left(-ikx\right),\ k = 1, \ldots, n \\ \phi_{2k}^*(x) &\equiv \exp\left(ikx\right),\ k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

dove "i", come al solito, è la costante immaginaria.

Polinomi trigonometrici complessi

Teorema

La successione $\{\phi_k^*\}_k$ *è una composta di elementi ortogonali di* $L^2_{\mathbb{C}}$.

Dimostrazione.

Per $j, k \in \mathbb{Z}$, *ricordando l'identità di Eulero*

$$\overline{\exp(ikx)} = \overline{\cos(kx) + i\sin(kx)} = \cos(kx) - i\sin(kx) = \exp(-ikx)$$

e dal fatto che $\exp(imx) \cdot \exp(inx) = \exp(i(m+n)x)$ *ricaviamo*

$$\int_0^{2\pi} \exp(ijx) \cdot \overline{\exp(ikx)}\, dx = \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x)\, dx.$$

Se $j = k$ *tale integrale vale evidentemente* 2π *altrimenti, se* $j \neq k$ *vale* 0 *in quanto*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(i(j-k)x)\, dx &= \frac{(\exp(i(j-k)2\pi) - \exp(i(j-k)0))}{i(j-k)} \\ &= \frac{1}{i(j-k)} \cdot (1-1) = 0. \end{aligned}$$

Polinomi trigonometrici complessi

Poichè $\{\phi_k^*\}$ è chiusa in $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ (cf.[2, p.24-27])

Teorema

Consideriamo la successione di elementi ortonormali di $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$

$$1/\sqrt{2\pi}, \ldots, \exp(-inx)/\sqrt{2\pi}, \; \exp(inx)/\sqrt{2\pi}, \ldots$$

Allora i coeff. di Fourier dell'elemento di miglior appross. sono

- $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx;$
- $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx)\, dx, \;\; k = 1, 2, \ldots;$
- $c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx, \;\; k = 1, 2, \ldots;$

ed è $\lim_k E_k(f) = 0$.

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(ikx)\, dx \right)^2 = 2\pi \|f\|^2$$

Polinomi trigonometrici complessi

Nota.

Di solito non si usa per tali serie di Fourier la notazione introdotta, ma si preferisce descriverla come la serie bilatera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp(ikx)$$

con

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \tag{4}$$

Tale espansione è facilmente ricavabile da quella precedentemente espressa.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Si supponga che la funzione $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ sia in realtà continua in $[0, 2\pi]$ e periodica cioè $f(0) = f(2\pi)$. Dalla teoria è noto che possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \tag{5}$$

Usualmente non si calcola tutta la sommatoria ma si considera una sua approssimazione

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx)$$

per N sufficientemente grande.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Osserviamo che differentemente dalla classica interpolazione polinomiale in nodi generici, l'approssimante trigonometrica è disponibile se siamo in grado di calcolare numericamente la quantità

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp\left(-ikx\right) dx$$

per $k = -(N-1), \ldots, (N-1)$.

Per funzioni continue e periodiche, si prova che è una buona scelta utilizzare la formula dei trapezi composta ([1, p.285-288])

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_1^{N-1} f(x_i), x_i = a+ih, i = 0, \ldots, N, h = (b-a)/N.$$

L'algoritmo, estremamente efficiente, per il calcolo dei coefficienti di Fourier si chiama FFT (acronimo di Fast Fourier Transform).

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Supponiamo $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia

- continua,
- periodica, cioè $f(0) = f(2\pi)$.

Utilizzando la formula composta dei trapezi basata su N intervalli equispaziati (con N che determina pure il numero di coefficienti di Fourier da calcolare!), se g è continua e periodica in $[0, 2\pi]$, posti $x_i = ih, i = 0, \ldots, N,\ h = 2\pi/N$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)dx &\approx \frac{h}{2}(f(0) + f(2\pi)) + h\sum_1^{N-1} f(x_i) \\
&= hf(2\pi) + h\sum_1^{N-1} f(x_i) = h\sum_1^{N} f(x_i) = \frac{2\pi}{N}\sum_1^{N} f(x_i)
\end{aligned}$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Così, essendo per g continua e periodica in $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \frac{2\pi}{N} \sum_1^N f(\frac{2\pi}{N})$$

il coefficiente di Fourier $\xi_k(f)$, è tale che

$$\xi_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(j \cdot \frac{2\pi}{N}\right) \cdot \exp\left(-ik \cdot j \frac{2\pi}{N}\right).$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Da

$$\xi_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(j\cdot\frac{2\pi}{N}\right)\cdot\exp\left(-ik\cdot j\frac{2\pi}{N}\right).$$

definiti

- $\mathcal{X}_j = \frac{1}{N} f\left(\frac{2\pi}{N} j\right)$ (con $j = 1,\ldots,N$);
- $\sigma_k := \sum_{j=1}^{N} \mathcal{X}_j \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi j}{N}\right)$,

abbiamo $\xi_{k-1}(f) \approx \sigma_k$ (ove $k = 1,\ldots,N$), in quanto

$$\begin{aligned}\xi_{k-1}(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-i(k-1)x)\,dx \\ &\approx \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right) = \sigma_k. \quad (6)\end{aligned}$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Si può dimostrare (non banale!) che

Teorema

Se $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ è continua e periodica allora l polinomio trigonometrico complesso

$$p_{N-1}(x) = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} a_k \cdot \exp\left(-ikx\right)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(j \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$$

(cioè a_k è l'approssimazione del coefficiente di Fourier $\xi_k(f)$ utilizzando la formula dei trapezi composta) interpola la funzione "f" nei nodi $x_j = j \cdot \frac{2\pi}{N}$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Ci poniamo varie domande:

- Quanto buona è l'approssimazione fornita dal metodo dei trapezi, nel calcolo degli integrali?
- Come decadono i coefficienti di Fourier (vedasi anche il Lemma di Lebesgue-Riemann)?
- Quanto buona è l'approssimazione fornita dalla miglior approssimazione f_n in norma 2 o dall'interpolante p_n?

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema (Errore FFT vs. coeff. Fourier, [10])

Se f è

- $\eta \geq 1$ *volte differenziabile,*
- $f^{(\eta)}$ *è periodica e a variazione limitata* V *in* $[0, 2\pi]$,

allora, detta $I_N(f)$ l'approssimazione fornita dalla formula composta dei trapezi nel calcolare $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$,

$$|I_N(f) - I| \leq \frac{4V}{N^{\eta+1}}.$$

Se f è analitica con $|f(t)| \leq M$ nella striscia aperta di semiampiezza α attorno all'asse reale del piano complesso, allora

$$|I_N(f) - I| \leq \frac{4\pi M}{\exp(\alpha N) - 1}.$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema (Grandezza coeff. Fourier, [10])

Se f è

- $\eta \geq 0$ *volte differenziabile,*
- $f^{(\eta)}$ *è periodica e a variazione limitata V in* $[0, 2\pi]$,

allora

$$|\xi_k(f)| \leq \frac{V}{2\pi\eta k^{\eta+1}}.$$

Se f è analitica con $|f(t)| \leq M$ nella striscia aperta di semiampiezza α attorno all'asse reale del piano complesso, allora

$$|\xi_k(f)| \leq M \cdot \exp(-\alpha k).$$

Facoltativo. Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Teorema (Qualità approssimazione, [10])

Se f è

- $\eta \geq 1$ *volte differenziabile,*
- $f^{(\eta)}$ *è periodica e a variazione limitata V in $[0, 2\pi]$,*

allora

- *la miglior approssimante* $f_{N-1} = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} \xi_k(f) \cdot \exp(-ikx)$ *in norma 2,*
- *il polinomio interpolante* $p_{N-1}(x) = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} a_k \cdot \exp(-ikx)$

sono tali che

$$\|f - f_{N-1}\|_{\infty} \leq \frac{V}{\pi\eta(N-1)^{\eta}}, \quad \|f - p_{N-1}\|_{\infty} \leq \frac{2V}{\pi\eta(N-1)^{\eta}}.$$

Facoltativo. FFT e Matlab

La funzione Matlab `fft` mappa il generico vettore $u = (u_1, \ldots, u_N)$ in un vettore $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N)$ tale che

$$\mathcal{U}_k = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right)$$

Da

$$\begin{aligned} \xi_{k-1}(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \exp\left(-i(k-1)x\right) dx \\ &\approx \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right) = \sigma_k \end{aligned}$$

si ha che `fft` mappa $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_N)$, dove $\mathcal{X}_j = \frac{1}{N} f\left(\tau(j-1)\right)$, in $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ che approssima $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{N-1})$.

Facoltativo. FFT e Matlab

Quindi, noto N e definita f, se scriviamo

```
>>n=1:N;
>>X_n=(1/N)*f(2*pi*n/N);
>>sigma_n=fft(X_n);
```

abbiamo che il k-simo integrale di indice (non negativo!) corrisponde al $(k+1)$-simo elemento del vettore σ_n (per $k = 0, \ldots, N-1$).

Nota.

Risulta importante osservare che `fft` *permette di approssimare solo integrali* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \exp\left(-i(k-1)x\right) dx$ *con* $k = 1, 2, \ldots$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Purtroppo si può mostrare che il $(k+1)$-simo elemento calcolato da FFT in realtà per problemi legati alla periodicità dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ è tale che

$$\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots .$$

Questo suggerisce che se sono rilevanti solo i termini di Fourier $\xi_{-(M-1)}, \ldots, \xi_{M-1}$ mentre gli altri sono di grandezza trascurabile, allora per $N = 2M - 1$

- applichiamo l'algoritmo FFT per calcolare $\xi_0, \ldots, \xi_N$,
- osservare che essendo rilevanti solo $\xi_{-(M-1)}, \ldots, \xi_{M-1}$
    - per $k = 0, \ldots, M-1$,
      $\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots \approx \xi_k$,
    - per $k = M, \ldots, 2M-2$,
      $\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots \approx$
      $\ldots + \xi_{k-(2M-1)} + \xi_k + \xi_{k+(2M-1)} + \ldots = \xi_{k-(2M-1)}$.

Facoltativo. FFT e Matlab

Importante.

Si osservi che se $N = 2^r$, allora i coefficienti di Fourier possono essere calcolati

- *numericamente con l'algoritmo noto come Fast Fourier Transform (FFT) in $O(N \log_2 N)$ operazioni aritmetiche,*
- *se non si usasse FFT, un algoritmo di base necessiterebbe di $O(N^2)$ operazioni aritmetiche, (cf. [1, p.181]).*

La funzione `fft` *implementa la Fast Fourier Transform ed è considerata una delle più rilevanti scoperte in ambito numerico per le sue molteplici applicazioni scientifiche.*

Facoltativo. FFT e Matlab

Calcoliamo l'approssimazione

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \qquad (7)$$

supposto che f sia una funzione continua e periodica in $[0, 2\pi]$ e N il numero di coefficienti calcolati da `fft`.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

La funzione Matlab

```
function  sigma=fft_coeffs(f,N)

n=(1:N)';
X=(1/N)*f(2*(n-1)*pi/N);
sigma=fft(X);
```

calcola il vettore

$$\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots$$

con

$$\xi_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx.$$

Facoltativo. FFT e Matlab

Se N è sufficientemente grande e $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ allora supponendo che circa metà di questi siano relativi a coefficienti di Fourier con indici positivi e metà a indici negativi

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sigma_{k+1} \exp(ikx) + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N-1} \sigma_{k+1} \exp(i(k-N)x). \quad (8)$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Per valutare l'approssimazione, noti i coefficienti, useremo quindi

```
function y=fft_eval(Y,x)
if size(x,1) == 1, x=x'; end
if size(Y,1) == 1, Y=Y'; end
N=length(Y); M=floor(N/2);
k=(M-N+1):M;
V=exp(i*x*k);
tpos=Y(1:M+1,1);
tneg=Y(M+2:end,1);
t=[tneg; tpos];
y=V*t;
```

Facoltativo. FFT e Matlab

Approssimiamo la funzione

$$f(x) = 3 \cdot \exp(-ix) + 8 \cdot \exp(+7ix) + \sin(x)$$

che è ovviamente periodica. Ricordiamo che

$$\sin(x) = \frac{(\exp(ix)) - \exp(-ix))}{2i}.$$

Evidentemente sono tutti nulli i coefficienti di Fourier il cui indice è strettamente inferiore a -1 e strettamente maggiore di 7, quindi una buona scelta è $N = 16$, in quanto potenza di 2 e tutti i coefficienti interessanti hanno indice nell'intervallo $[-\lfloor N/2 \rfloor + 1, \lfloor N/2 \rfloor]$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Così salviamo in `fft_example.m`

```
N=16;
f=inline('exp(-i*x)+exp(7*i*x)+sin(x)');
Y=fft_coeffs(f,N);

x=(0:0.01:2*pi)';
fx=f(x);
tx=fft_eval(Y,x);

err=norm(fx-tx,inf);
fprintf('\n \t [err, inf norm]: %2.2e',err)

fprintf('\n');
```

Facoltativo. FFT e Matlab

e abbiamo come risultato

```
>> fft_example
err =
   7.5078e-15
>>
```

Esercizio

Esercizio

Cosa succede se in `fft_example.m` *si usa* $N = 13$ *invece di* $N = 16$*? Darne una spiegazione, controllando i valori assunti dal vettore* `Y`*.*

Esercizio

Modificare `fft_example.m` *per studiare l'approssimazione trigonometrica complessa della funzione* $f(x) = |x - \pi|$ *per* $N = 4, 8, 16, 32, 64$*. Come decresce l'errore? Eseguire sulla stessa figura il grafico di* f *in* $[0, 2\pi]$ *come pure della sua approssimazione con polinomi trigonometrici complessi per* $N = 16$*. Nota: in caso di warning, utilizzare solo la parte reale del vettore* `tx`*, tramite il comando* `tx=real(tx);`

Bibliografia

K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.

G. Dahlquist e A. Bjorck , *Numerical methods*, Dover, 2003.

P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

Encyclopedia of Math, (Orthogonal Series), http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Orthogonal_series.

G. Gilardi *Analisi Due, seconda edizione*, McGraw-Hill, 1996.

D.H. Griffel, *Applied functional analysis*, Dover publications, 2002.

A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.

A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri *Matematica Numerica*, Springer, 1998.

G.B. Wright, M. Javed, H. Montanelli, L.N. Trefethen, *Extension of Chebfun to periodic functions*, SIAM J. Sci. Comp., 2015.

Wikipedia, (Fourier Series), http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series.