Quadratura numerica [1]

A. Sommariva[2]

Keywords: Formule interpolatorie. Grado di precisione. Formule interpolatorie: loro grado di precisione. Formule di Newton-Cotes. Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson. Formule composte. Formule dei trapezi composte. Errore e caso funzioni periodiche (teorema di Eulero-Mac Laurin). Formula di Cavalieri-Simpson composta. Miglioramento delle formule di quadratura di Newton-Cotes (composte), in termini di grado di precisione e illimitatezza degli intervalli. Formule gaussiane. Teorema di esistenza e unicita' delle formule gaussiane (con dimostrazione). Errori formule Newton-Cotes. Errori formule gaussiane. Stabilita' delle formule di quadratura. Norme di alcuni operatori di integrazione. Teorema di Stielties (con dimostrazione). Alcune considerazioni sul teorema di Stieltjes. Teorema di Polya-Steklov (con dimostrazione). Alcuni corollari (formule a pesi positivi e formule gaussiane).

Revisione: 11 maggio 2021

---

1. Introduzione

Problema 1.1. *Un classico problema dell'analisi numerica è quello di calcolare l'integrale definito di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in un intervallo avente estremi di integrazione a, b (non necessariamente finiti)*

$$I_w(f) := I_w(f, a, b) = \int_a^b f(x)\, w(x) dx$$

dove "$w : (a, b) \to \mathbb{R}$" è una funzione peso [1, p.206, p.270].
La nostra intenzione è di approssimare $I(f)$ come

$$I_w(f) \approx Q_N(f) := \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) \tag{1}$$

I termini w_i e $x_i \in \mathcal{I} \supseteq (a, b)$ sono detti risp. pesi e nodi.

Siano

- (a, b) l'intervallo di integrazione (non necessariamente limitato),
- $x_1, \ldots, x_N$ un insieme di N punti a due a due distinti,

- $f \in C((a,b))$ una funzione w-integrabile cioè per cui esista finito $I_w(f)$.

Nota 1.2. *Se l'intervallo (a,b) è limitato, per il teorema di Weierstrass e l'integrabilità della funzione peso, se $f \in C([a,b])$ allora è w-integrabile in (a,b) visto che essendo $\|w\|_1 = \int_a^b w(x)dx$,*

$$\left| \int_a^b f(x)\, w(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, w(x)dx \leq \|f\|_\infty \|w\|_1 < +\infty.$$

Se

$$p_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) L_i(x)$$

è il polinomio che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1, \ldots, N$, dove al solito L_i indica l'i-simo polinomio di Lagrange allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &\approx \int_a^b p_{N-1}(x)w(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{N} f(x_i)L_i(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\int_a^b L_i(x)\, w(x)dx \right) f(x_i) \end{aligned} \quad (2)$$

per cui, confrontando con la formula (1) abbiamo

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\, w(x)dx, \;\; i = 1, \ldots, N.$$

In virtù di quanto detto appare naturale la seguente

Definizione 1.3 (Formula interpolatoria (Lagrange, 1795)). *Una formula di quadratura*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) \quad (3)$$

per cui

$$w_k = \int_a^b L_k(x)\, w(x)dx, \;\; k = 1, \ldots, N \quad (4)$$

si dice **interpolatoria**.

Definizione 1.4 (Grado di precisione, Radau 1880). *Una formula*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

ha **grado di precisione** *<u>almeno</u> M se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a M, ovvero*

$$\int_a^b p_M(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i p_M(x_i), \;\; p_M \in \mathbb{P}_M.$$

Ha inoltre grado di precisione <u>esattamente</u> M se e solo se è esatta per ogni polinomio di grado inferiore o uguale a M ed esiste un polinomio di grado $M+1$ per cui non lo sia.

Mostriamo ora il seguente

Teorema 1.5. *Una formula*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

è interpolatoria, ovvero $w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx$ per $i = 1, \ldots, N$, se e solo se ha grado di precisione almeno $N-1$.

Dimostrazione 1.6. *$\Rightarrow$ Se la formula è interpolatoria, $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$ con*

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \;\; i = 1, \ldots, N.$$

Se $f = p_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}$ allora $p_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N} p_{N-1}(x_i)L_i(x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{N-1}(x)w(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=1}^{N} p_{N-1}(x_i)L_i(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_{N-1}(x_i)\int_a^b L_i(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_i p_{N-1}(x_i), \end{aligned} \tag{5}$$

e quindi la formula ha grado di precisione $N-1$.

$\Leftarrow$ Se è esatta per ogni polinomio di grado $N-1$, lo è pure per i polinomi di Lagrange $L_k \in \mathbb{P}_{N-1}$, da cui, visto che $L_k(x_i) = \delta_{i,k}$, che

$$\int_a^b L_k(x)\, w(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i L_k(x_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{i,k} = w_k, \;\; k = 1, \ldots, N$$

e quindi la formula é interpolatoria.

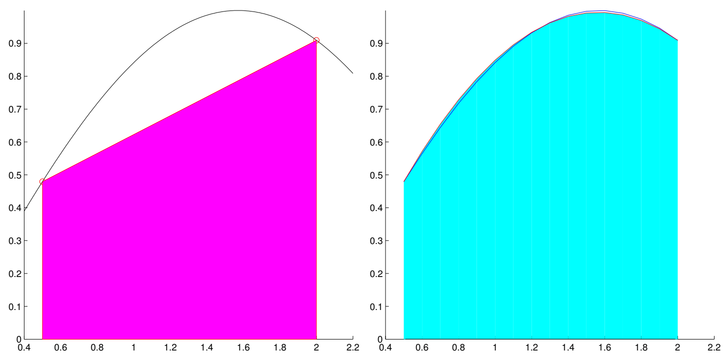

Figura 1: Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^{2} \sin(x)\, dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

Definizione 1.7 (Formule di Newton-Cotes (chiuse), (Newton 1676, Cotes 1722)). *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Una formula $S_N(f)$ tale che*

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \approx S_N(f) := \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

si dice di tipo Newton-Cotes chiusa se

- *i nodi sono equispaziati, e piú precisamente sono*

$$x_i = a + \frac{(i-1)\,(b-a)}{N-1},\ \ i = 1, \ldots, N,$$

- *i pesi sono*

$$w_i = \int_a^b L_i(x)dx,\ \ i = 1, \ldots, N,\ \ \ L_i(x) = \prod_{j=1,\, j \neq i}^{N} \frac{(x - x_i)}{x_j - x_i}$$

e quindi la formula è interpolatoria e ha grado di precisione almeno $N - 1$.

Vediamo alcune formule di Newton-Cotes (chiuse).

Definizione 1.8 (Regola del trapezio). *La formula*

$$I(f) \approx S_2(f) := S_2(f, a, b) := \frac{(b-a)\,(f(a) + f(b))}{2}$$

si chiama regola del trapezio.

Si dimostra che

- posto $h = b - a$, l'errore compiuto è

$$\mathcal{E}_2(f) := I(f) - S_2(f) = \frac{-h^3}{12}\, f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \tag{6}$$

- da (6), si vede che il suo grado di precisione è 1 in quanto
  - se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
  - se $f \in \mathbb{P}_2 \backslash \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) \neq 0$.

Definizione 1.9 (Regola di Cavalieri-Simpson (Cavalieri 1635, Simpson 1743)). *La formula*

$$I(f) \approx S_3(f) := S_3(f, a, b) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

si chiama regola di Cavalieri-Simpson.

Si dimostra che

- l'errore compiuto è

$$\mathcal{E}_3(f) := I(f) - S_3(f) = \frac{-h^5}{90}\, f^{(4)}(\xi),\ h = \frac{b-a}{2}, \ \ \xi \in (a, b)$$

- il grado di precisione è 3 (e non 2 come previsto!) in quanto
  - se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
  - se $f \in \mathbb{P}_4 \backslash \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) \neq 0$.

Facoltativo 1.10. *Vediamo calcolando i pesi, che in effetti le due formule sono interpolatorie.*

- *Regola del trapezio. Posti $x_1 = a$, $x_2 = b$ abbiamo che*

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b},\ L_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

e quindi visto che $w \equiv 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}
w_1 &= \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx \\
&= \frac{1}{a-b}\frac{(x-b)^2}{2}\,\Big|_a^b = \frac{1}{a-b}\frac{(x-b)^2}{2}\,\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{a-b}\frac{-(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \int_a^b L_2(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}\,|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}\,|_a^b = \frac{b-a}{2}
\end{aligned}
$$

Facoltativo 1.11. • *Cavalieri-Simpson. I ragionamenti sono analoghi. D'altra parte essendo quelle dei trapezi e Simpson regole rispettivamente aventi 2 e 3 punti con grado 2 e 4, allora sono entrambe interpolatorie.*

Per ulteriori dettagli si confronti [1, p.252-258].

- Qualora le funzioni da integrare non siano sufficientemente derivabili, una stima dell'errore viene fornita dalle formule dell'errore via **nucleo di Peano** ([1, p.259]).
- Ricordiamo che per $N \geq 8$ le formule di Newton-Cotes chiuse hanno pesi di segno diverso e sono **instabili** dal punto di vista della propagazione degli errori (cf. [3, p.196]).
- *Regola di Milne-Boole*: $\frac{2h}{45}(7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5)$.
- *Formula a sei punti*: $\frac{5h}{288}(19f_1 + 75f_2 + 50f_3 + 50f_4 + 75f_5 + 19f_6 + 41f_7)$.
- *Formula a Weddle-Hardy*: $\frac{h}{140}(41f_1 + 216f_2 + 27f_3 + 272f_4 + 27f_5 + 216f_6 + 41f_7)$.
- *Formula a otto punti*: $\frac{7h}{17280}(751f_1 + 3577f_2 + 1323f_3 + 2989f_4 + 2989f_5 + 1323f_6 + 3577f_7 + 751f_8)$.
- *Formula a nove punti*: $\frac{4h}{14175}(989f_1 + 5888f_2 - 928f_3 + 10496f_4 - 4540f_5 + 10496f_6 - 928f_7 + 5888f_8 + 989f_9)$.
- *Formula a dieci punti*: $\frac{9h}{89600}(2857(f_1 + f_{10}) + 15741(f_2 + f_9) + 1080(f_3 + f_8) + 19344(f_4 + f_7) + 5778(f_5 + f_6))$.
- *Formula a undici punti*: $\frac{5h}{2999376}(16067(f_1+f_{11})+106300(f_2+f_{10})-48525(f_3+f_9) + 272400(f_4 + f_8) - 260550(f_5 + f_7) + 427368f_6)$.

Nota 1.12. • *Le formule di Newton-Cotes sono state scoperte da Newton nel 1676 e contemporaneamente da Cotes, che in seguito elaboró meglio la teoria.*

- *Di seguito Cotes calcoló le formule per $n \leq 11$. Per questo motivo, talvolta i pesi w_i delle formule di Newton-Cotes, sono detti "numeri di Cotes".*
- *Per un interessante nota storica si veda [4] .*

Visto che per $N \geq 8$ le formule risultano instabili, ci si domanda se sia possibile ottenere per $N \geq 8$ delle formule stabili.

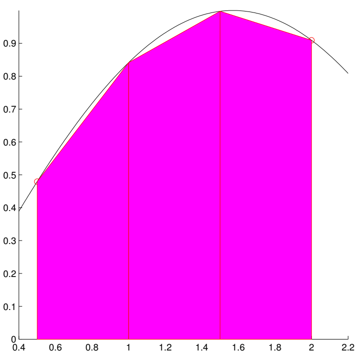

Figura 2: Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_{0.5}^{2} \sin(x)\, dx$ (area in magenta).

Definizione 1.13 (Formule composte). *Si suddivida l'intervallo (chiuso e limitato) $[a,b]$ in N subintervalli $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ tali che $x_j = a + jh_N$ con $h_N = (b-a)/N$. Dalle proprietà dell'integrale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} S(f, x_j, x_{j+1}) \tag{7}$$

dove S è una delle regole di quadratura finora esposte (ad esempio $S_3(f)$). Le formule descritte in (7) sono dette **composte**.

Definizione 1.14 (Formula dei trapezi (Stevino?)). *Siano $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$ con $h = (b-a)/N$. La formula*

$$S_2^{(c)}(f, N) := \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2}\right] \tag{8}$$

si chiama dei trapezi (o del trapezio composta).

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a,b)$

$$\mathcal{E}_2^{(c)}(f) := I(f) - S_2^{(c)}(f,N) = \frac{-(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{\mathbf{12}}\mathbf{h_N^2}\,\mathbf{f^{(2)}}(\xi),\ \ h_N = \frac{(b-a)}{N}.$$

- il grado di precisione è 1, ma rispetto alla Regola del trapezio a passo $h = h_1 = b - a$, per $N \geq 1$ abbiamo che $h_N \leq h$ da cui

$$\frac{b-a}{12}h_N^2 = \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{b-a}{12}h^2$$

Sotto certe ipotesi, la stima $\mathcal{E}_2^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^2}$ è conservativa.

Teorema 1.15 (Formula di Eulero-Mac Laurin, 1735). *Se l'integranda $f \in C^{2M+2}([a,b])$ allora*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= S_2^{(c)}(f,N) - \sum_{k=1}^{M} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h_N^{2k} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &- \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h_N^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi),\ \xi \in (a,b)\end{aligned}$$

dove B_k sono i numeri di Bernoulli (Bernoulli, 1713).

Se $f \in C^{2M+2}([a,b])$ e $f^{(2k-1)}(b) = f^{(2k-1)}(a)$, per $k = 1, \ldots, M$

$$\int_a^b f(x)dx - S_2^{(c)}(f,N) = -\frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h_N^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

e deduciamo che $\mathcal{E}_2^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^{2M+2}}$.

Storicamente la formula venne trovata indipendentemente da Eulero e da Maclaurin, il primo per velocizzare la convergenze di formule lentamente convergenti mediante integrali, in quanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^{M} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) + f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &- \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi) \qquad (9)\end{aligned}$$

mentre il secondo per questioni di integrazione numerica.

Il resto della formula fu calcolato da S.D.Poisson.

Nota 1.16 (Primo algoritmo elaborato da una macchina). *Augusta Ada Byron, meglio nota come Ada Lovelace (Londra, 10 dicembre 1815 Londra, 27 novembre 1852), stata una matematica inglese, nota soprattutto per il suo lavoro alla macchina analitica ideata da Charles Babbage.*

Tra i suoi appunti sulla macchina di Babbage si rintraccia anche un algoritmo per generare i numeri di Bernoulli, considerato come il primo algoritmo espressamente inteso per essere elaborato da una macchina, tanto che Ada Lovelace spesso ricordata come la prima programmatrice di computer al mondo.

In realtà l'errore può perfino decrescere più rapidamente.

Teorema 1.17. *Si supponga $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia*

- *periodica con periodo 2π,*
- *analitica,*

- *soddisfi $|f(z)| \leq M$ nel semipiano $Im(z) > -a$, $a > 0$.*

Allora per ogni $N \geq 1$

$$|S_2^{(c)}(f, N) - I(f)| \leq \frac{2\pi M}{e^{aN} - 1}$$

e la costante 2π è la più piccola possibile.

Definizione 1.18 (Formula di Cavalieri-Simpson composta). *Fissati N subintervalli, sia $h_N = \frac{b-a}{N}$. Siano inoltre $x_k = a + kh_N/2$, $k = 0, \ldots, 2N$. La formula*

$$I(f) \approx S_3^{(c)}(f, N) := \frac{h_N}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N})\right] \tag{10}$$

è nota come di Cavalieri-Simpson composta.

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$\mathcal{E}_3^{(c)}(f) := I(f) - S_3^{(c)}(f, N) = \frac{-(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\mathbf{180}}\left(\frac{\mathbf{h_N}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{4}} \mathbf{f^{(4)}}(\xi)$$

- il grado di precisione è 3, ma relativamente alla regola di Cavalieri-Simpson, per $N \geq 1$, il passo h_N è minore.

Problema 1.19. *Nelle formule interpolatorie di Newton-Cotes (come ad esempio la regola del Trapezio o di Cavalieri-Simpson)*

- *i nodi $x_1, \ldots, x_n$ sono equispaziati,*
- *il grado di precisione δ è generalmente uguale almeno a $n-1$ ma in alcuni casi, come per la regola di Cavalieri-Simpson, uguale al numero di nodi n.*

Consideriamo ora formule

- *valide anche su intervalli (a, b) non necessariamente limitati,*
- *valide per certe funzioni peso $w : (a, b) \to \mathbb{R}$,*
- *che a parità di nodi hanno grado di precisione maggiore.*

Definizione 1.20 (Funzione peso). *Una funzione $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ (non necessariamente limitato) si dice* funzione peso, *se (cf. [1, p.206, p.270])*

1. *w è nonnegativa in (a, b);*

2. *esiste ed è finito*

$$\int_a^b |x|^n w(x)\,dx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$*;*

3. *se*

$$\int_a^b g(x)w(x)\,dx$$

per una qualche funzione nonnegativa g *allora* $g \equiv 0$ *in* (a,b)*.*

Tra gli esempi più noti ricordiamo

1. *Legendre (scoperti nel 1785)*: $w(x) \equiv 1$ in $[a,b]$ limitato;
2. *Jacobi (scoperti nel 1834)*: $w(x) = (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}$ in $(-1,1)$ per $\alpha, \beta \geq -1$;
3. *Chebyshev (scoperti nel 1853)*: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(-1,1)$;
4. *Laguerre (scoperti nel 1879)*: $w(x) = \exp(-x)$ in $[0,\infty)$;
5. *Hermite (scoperti nel 1864)*: $w(x) = \exp(-x^2)$ in $(-\infty,\infty)$;

Nota 1.21. *I polinomi di Hermite erano già parzialmente noti a Laplace (1810).*

Si supponga ora di dover calcolare per qualche funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)\,dx.$$

Il problema è evidentemente più generale di quello di calcolare un integrale del tipo $\int_a^b f(x)dx$ con $f \in C([a,b])$, $[a,b]$ limitato, visto che

- l'integranda fw non é necessariamente continua in $[a,b]$ (si consideri ad esempio il peso di Chebyshev che ha una singolarità in $a=-1$, $b=1$)
- oppure può succedere che l'intervallo sia illimitato come nel caso del peso di Laguerre o Hermite.

Problema 1.22. *Esistono nodi* $x_1,\ldots,x_n$ *e pesi* $w_1,\ldots,w_n$ *(detti di Gauss-nome funzione peso) per cui le relative formule di quadratura di tipo interpolatorio abbiano grado di precisione* $\delta = 2n-1$*, cioè calcolino esattamente*

$$\int_a^b p(x)w(x)\,dx$$

per ogni polinomio p *il cui grado è minore o uguale a* $2n-1$*?*

La risposta è affermativa, come si può vedere in [1, p.272].

Teorema 1.23 (Esistenza e unicità delle formule gaussiane (Jacobi, 1826)). *Per ogni* $n \geq 1$ *esistono e sono unici dei nodi* $x_1,\ldots,x_n$ *e pesi* $w_1,\ldots,w_n$ *per cui il grado di precisione sia almeno* $2n-1$*.*

I nodi sono gli zeri del polinomio ortogonale di grado n,

$$\phi_n(x) = A_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

e i corrispettivi pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx = \int_a^b L_i^2(x)w(x)dx,\ i = 1, \ldots, n.$$

Dimostrazione 1.24 ([3, p.209]). *Per prima cosa mostriamo che in effetti con tale scelta dei nodi la formula interpolatoria ha grado di precisione almeno $2n-1$, che i pesi sono univocamente determinati e positivi.*

Siano $p_{2n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e $q_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ tali che

$$p_{2n-1} = q_{n-1}\phi_n + r_{n-1}.$$

- $\int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx = (q_{n-1}, \phi_n)_w = 0$, *poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale rispetto w di grado n; infatti essendo*

  $$(\phi_k, \phi_n)_w = 0,\ k = 0 < n$$

  necessariamente da $q_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k$ abbiamo

  $$(q_{n-1}, \phi_n)_w = (\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k, \phi_n)_w = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\phi_k, \phi_n)_w = 0$$

- la formula è interpolatoria per costruzione (vedere la definizione dei pesi!), per cui esatta per ogni polinomio di grado $n-1$ in quanto basata su n punti a due a due distinti;

- se x_k è uno zero di ϕ_n allora

  $$p_{2n-1}(x_k) = q_{n-1}(x_k)\phi_n(x_k) + r_{n-1}(x_k) = r_{n-1}(x_k).$$

  Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{2n-1}(x)w(x)dx &= \int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx \\ &= 0 + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k r_{n-1}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} w_k p_{2n-1}(x_k) \qquad (11) \end{aligned}$$

per cui tale formula ha grado di precisione almeno $2n-1$.

Dimostrazione 1.25. *Inoltre, come dimostrato da Stieltjes nel 1884, i pesi*

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \ \ i = 1, \ldots, n$$

sono positivi.

Infatti la formula è esatta per ognuno dei quadrati dei polinomi di Lagrange relativo ai punti $x_1, \ldots, x_n$ in quanto

- *deg(L_i^2)=$2(n-1)$,*
- *la formula ha grado di precisione almeno $2n-1$,*

per cui, per ogni $j = 1, \ldots, n$,

$$0 < \int_a^b L_j^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k L_j^2(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{j,k} = w_j.$$

Se esistesse un'altra formula interpolatoria con grado di precisione almeno $2n-1$ e avesse

- nodi $\{\tilde{x}_j\}_{j=1,\ldots,n}$,
- pesi $\{\tilde{w}_j\}_{j=1,\ldots,n}$,

per prima cosa i pesi sarebbero positivi poichè il grado di precisione è almeno $2n-1$ e quindi sarebbe esatta per il j-simo polinomio di Lagrange $\tilde{L}_j \in \mathbb{P}_{n-1}$ da cui

$$0 < \int_a^b \tilde{L}_j^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j^2(\tilde{x}_k) = \tilde{w}_j,$$

per $j = 1, \ldots, n$.

Supponiamo che tanto i nodi $\{x_j\}$ quanto gli $\{\tilde{x}_j\}$ siano ordinati crescentemente.

Se $\tilde{L}_j$ è il j-simo polinomio di Lagrange (avente grado $n-1$), poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale di grado n rispetto al peso w, e $\tilde{w}_j > 0$ abbiamo che da

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_n, \tilde{L}_j)_w = \int_a^b \phi_n(x)\tilde{L}_j(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j(\tilde{x}_k)\phi_n(\tilde{x}_k) \\ &= \tilde{w}_j \cdot \phi_n(\tilde{x}_j) \end{aligned} \tag{12}$$

necessariamente $x_j = \tilde{x}_j$ per cui $\tilde{x}_j$ è un qualche zero del polinomio ortogonale.

A priori i nodi della seconda formula possono essere meno di n. Siano essi $\tilde{x}_j$ con $j = 1, \ldots, m < n$. Ma in tal caso

- $p_m(x) = \prod_{j=1}^m (x - \tilde{x}_j) \neq 0$,
- $p_m^2(x)$ ha grado $2m \leq 2(n-1) = 2n-2$,

e quindi

$$0 < \int_a^b p_m^2(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^m \tilde{w}_j \cdot \prod_{k=1}^m (\tilde{x}_j - \tilde{x}_k)^2 = 0$$

Così i nodi $\tilde{x}_j$ sono esattamente n e coincidono con x_j e visto che questo implica $L_j = \tilde{L}_j$ ricaviamo anche

$$w_j = \int_a^b L_j^2(x)w(x)dx = \int_a^b \tilde{L}_j^2(x)w(x)dx = \tilde{w}_j.$$

□

Nota 1.26. *Osserviamo che una formula gaussiana a n nodi non può avere grado maggiore di $2n-1$.*

Infatti, posto $p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) \neq 0$, $p_n^2(x)$ ha grado $2n$ e avremmo

$$0 < \int_a^b p_n^2(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \prod_{k=1}^n (x_j - x_k)^2 = 0$$

il che è assurdo.

Nota 1.27 (Sequenza di scoperte).

- *Le formule gaussiane per il peso di Legendre furono scoperte da Gauss nel 1814 mediante un elegante tecnica basata sulle frazioni continue associate a serie ipergeometriche. [4, p.17].*
- *Jacobi successivamente semplificó la teoria nel 1826 mediante l'uso di polinomi ortogonali il cui nome fu introdotto probabilmente da Schmidt nel 1905.*
- *Il lavoro di Gauss e Jacobi rimase* dormiente *per almeno 40 anni.*
- *Successivamente Posse (1875), Christoffel (1877) considerarono funzioni peso piú generali su intervalli finiti.*
- *Stieltjes nel 1894 generalizzó la teoria a misure di Stieltjes positive su intervalli anche illimitati.*

Teorema 1.28 ([1], p. 264). *Sia la regola di Newton-Cotes $I(f) \approx I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_{i,n} f(x_{i,n})$ e poniamo $h = (b-a)/(n-1)$.*

- *se* **n è dispari** *e $f \in C^{(n+1)}([a,b])$ allora*

  $$I(f) - I_n(f) = \mathbf{C_n\, h^{n+2} f^{(n+1)}}(\eta),\ \eta \in (a,b)$$

  con

  $$C_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{n-1} \mu^2(\mu-1)\ldots(\mu-(n-1))d\mu;$$

- *se* **n è pari** *e $f \in C^{(n)}([a,b])$ allora*

  $$I(f) - I_n(f) = \mathbf{C_n\, h^{n+1} f^{(n)}}(\eta),\ \eta \in (a,b)$$

  con

  $$C_n = \frac{1}{n!} \int_0^{n-1} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-(n-1))d\mu;$$

Ricordiamo che per la regola dei trapezi $\mathcal{E}_2(f) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$ mentre per la regola di Cavalieri-Simpson $\mathcal{E}_3(f) = \frac{-h^5}{12} f^{(4)}(\xi)$.

Per quanto concerne l'errore compiuto dalle formule gaussiane,

Teorema 1.29 (Markov?,[1], p. 272). *Sia $f \in C^{(2n)}(a, b)$ con (a, b) limitato e supponiamo*

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \approx I_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,n} f(x_{i,n})$$

sia una formula gaussiana rispetto alla funzione peso w. Allora

$$\mathcal{E}_n(f) := I_w(f) - I_n(f) = \frac{\gamma_n}{A_n^2 (2n)!} f^{(2n)}(\eta),\ \ \eta \in (a, b)$$

dove A_n è il coefficiente di grado massimo del polinomio ortogonale ϕ_n di grado n, $\gamma_n = \int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx$.

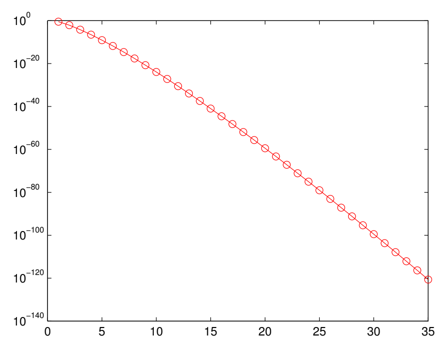

Figura 3: Grafico in scala semilogaritmica della funzione $\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}$.

In particolare, se $w(x) \equiv 1$, $[a, b] \equiv [-1, 1]$ allora

$$\mathcal{E}_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta),\ \ \eta \in (-1, 1).$$

Problema 1.30. *Sia*

- *(a, b) un intervallo non necessariamente limitato,*
- *w una funzione peso in (a, b).*

Inoltre supponiamo

- *posto $f_j = f(x_j)$ sia*

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx S(f) := \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j, \tag{13}$$

- *invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.*

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando invece

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \tilde{S}_n(f) := \sum_{j=1}^{\eta} w_j \tilde{f}_j. \tag{14}$$

Da

$$S(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j, \quad \tilde{S}(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j \tilde{f}_j,$$

ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S(f) - \tilde{S}(f)| &= |\sum_{j=1}^{\eta} w_j (f_j - \tilde{f}_j)| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j||f_j - \tilde{f}_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|\right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned} \tag{15}$$

Quindi la quantità

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$$

è un **indice di stabilità** della formula di quadratura S.

Supponiamo che la formula abbia grado di precisione almeno 0 e indichiamo con $\{w_k^+\}_{k=1,\ldots,\eta^+}$ i pesi positivi e con $\{w_k^-\}_{k=1,\ldots,\eta^-}$ quelli negativi. Si ha che

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)dx &= \int_a^b 1 \cdot w(x)dx = \sum_{j=1}^{\eta} w_j = \sum_{j=1}^{\eta^+} w_j^+ + \sum_{j=1}^{\eta^+} w_j^- \\ &= \sum_{j=1}^{\eta^+} |w_j^+| + \left(\sum_{j=1}^{\eta^-} |w_j^-| - \sum_{j=1}^{\eta^-} |w_j^-|\right) - \sum_{j=1}^{\eta^-} |w_j^-| \\ &= \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| - 2\sum_{k=1}^{\eta^-} |w_k^-| \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| = \int_a^b w(x)dx + 2\sum_{k=1}^{\eta^-} |w_k^-|.$$

Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$, mentre se sono tutti positivi risulta $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| = \int_a^b w(x)dx$.

Proposizione 1.31. *Se (a,b) è limitato allora l'operatore $S : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, definito da*

$$S(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j.$$

è lineare e continuo ed ha norma $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.

Nota 1.32. *Questo teorema dice che l'indice di stabilità corrisponde alla norma*

$$\|S\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_\infty}$$

dell'operatore S.

Dimostrazione 1.33. *Per il teorema di Weierstrass esiste $\|f\|_\infty$ ed è*

$$|S(f)| = \left| \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j||f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \|f\|_\infty$$

e quindi I_n è lineare e continuo con norma minore o uguale a

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|.$$

In particolare, scegliendo opportunamente f si prova che la norma dell'operatore di quadratura

$$\|S\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_\infty}$$

coincide con $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.
□

Proposizione 1.34. *Se (a,b) è limitato, $I : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx$, allora*

$$\|I\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty} = \int_a^b w(x)dx = \|w\|_1.$$

Dimostrazione. Da

$$\begin{aligned} |I(f)| &= \left| \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|w(x)dx \\ &\leq \int_a^b w(x)dx \cdot \|f\|_\infty = \|w\|_1 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

ed essendo $|I(1)| = \|w\|_1$, deduciamo che $\|I\|_\infty = \|w\|_1$.

Teorema 1.35 (Stieltjes). *Sia*

- *(a, b) un intervallo limitato,*
- *$f \in C([a, b])$,*
- *$w : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione peso.*

Se

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{\eta_n} w_j f_j, \quad \text{con } f_j = f(x_j)$$

è una formula di quadratura avente grado di precisione almeno n, posti $\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - I_n(f)$ e $I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$, si ha

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \tag{16}$$

Dimostrazione 1.36.

- *Se $q_n \in \mathbb{P}_n$ è un polinomio arbitrario di grado n, avendo la formula di quadratura grado di precisione almeno n, ed $I_w(q_n) = I_n(q_n)$.*
- *Ricordiamo inoltre che gli operatori I_w ed I_n sono lineari e quindi*

$$I_n(f - q_n) = I_n(f) - I_n(q_n), \quad I_w(f - q_n) = I_w(f) - I_w(q_n).$$

- *Per quanto visto $|I_n(f)| \leq \sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \|f\|_\infty$, $|I_w(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty$.*

Quindi, se $q_n^* \in \mathbb{P}_n$ è il polinomio di miglior approssimazione di f, da

1. $|I_w(g)| \leq \|w\|_1 \|g\|_\infty$, $g \in C([a, b])$
2. $|I_n(g)| \leq \|I_n\|_\infty \|g\|_\infty = \sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \|g\|_\infty$, $g \in C([a, b])$
3. $\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty = \|f - q_n^*\|_\infty$.

essendo $I_n(q_n^*) = I_w(q_n^*)$, visto che la formula ha grado di esattezza n,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}_n(f) & = & |I_w(f) - I_n(f)| = |I_w(f) - I_n(q_n^*) + I_n(q_n^*) - I_n(f)| \\
& \leq & |I_w(f) - I_n(q_n^*)| + |I_n(q_n^*) - I_n(f)| \\
& = & |I_w(f) - I_w(q_n^*)| + |I_n(q_n^* - f)| = |I_w(f - q_n^*)| + |I_n(f - q_n^*)| \\
& \stackrel{(1),(2)}{\leq} & \|w\|_1 \|f - q_n^*\|_\infty + \displaystyle\sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \|f - q_n^*\|_\infty \\
& \stackrel{(3)}{=} & \left(\|w\|_1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{\eta_n} |w_j| \right) \cdot \displaystyle\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty.
\end{array}$$

□

Esempio 1.1. *Quale esempio consideriamo una formula*

- *a pesi positivi,*
- *grado di precisione* $n \geq 0$.

Necessariamente, posto $E_n(f) = \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$,

- $\|I_n\|_\infty = \sum_i |w_i| = \sum_i w_i = \|w\|_1 = \int_a^b w(x)dx$, *in quanto la formula integra esattamente la costante* 1,
- $\|I_w\|_\infty = \|w\|_1$,

  ricaviamo

$$|I_w(f) - I_n(f)| \leq (\sum_i |w_i| + \|w\|_1)E_n(f) = 2\|w\|_1 E_n(f).$$

Se ad esempio $w \equiv 1$ *nell'intervallo* $(-1, 1)$, *da* $\|w\|_1 = 2$ *si ha che*

$$|I_w(f) - I_n(f)| \leq 4 \cdot E_n(f).$$

Nota 1.37 (Importante!). *L'interesse di questo teorema è il legame col polinomio di miglior approssimazione. Risulta importante osservare che in*

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \tag{17}$$

contribuiscono i prodotti di due termini.

1. *Il primo è dovuto alla funzione peso e alla stabilità della formula di quadratura.*
2. *Il secondo è dato esclusivamente dalla miglior approssimazione di* f (*e non* fw).

Quindi da

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \tag{18}$$

se w è una funzione peso con

- fw **non regolare**
- ma f **regolare**

allora l'utilizzo di formule gaussiane rispetto alla funzione peso w, come anticipato prima, offre risultati potenzialmente migliori, come suggerito dai teoremi di Jackson sulla miglior approssimante polinomiale di una funzione f, che forniscono stime di $\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$ con $f \in C([a, b])$ (dotando $C([a, b])$ della norma infinito).

Problema 1.38. *Si supponga di calcolare l'integrale*

$$\int_{-1}^{1} \exp(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

con

- *la formula di Gauss-Legendre e*
- *una formula di Gauss-Jacobi con esponenti* $\alpha = 1/2$ *e* $\beta = 1/2$.

Quale delle due sarà da usare e perchè ?

Sia $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione peso, con (a, b) limitato. Sotto queste ipotesi, se f continua in $[a, b]$ allora $fw \in L^1(a, b)$.

Definita la famiglia di formule $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (con g.d.p. non necessariamente n)

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx \approx S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \tag{19}$$

introduciamo l'errore della formula n-sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}).$$

Ci si domanda quando

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \to 0.$$

Teorema 1.39 (Polya-Steklov, (1916-1933) [3], p.202). *Siano*

- $[a, b]$ *un intervallo compatto,*
- $S_n(f) = \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n})$, $n = 0, 1, \ldots$ *una sequenza di formule di quadratura tale che* $I_w(f) \approx S_n(f)$.
- $\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n})$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè per ogni $f \in C([a, b])$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$$

è che

1. *esista* $M \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia* $\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M$ *(indip. da* n*);*
2. *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *si abbia* $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0$.

Dimostrazione 1.40. $\Leftarrow$ *(Steklov, 1916). Supponiamo che*

1. *esista* $M \in \mathbb{R}$ *tale che per ogni* n *si abbia*

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M;$$

2. *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *si abbia*

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0.$$

Per un teorema di densità dovuto a Weierstrass, per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un polinomio* p *tale che* $\|f - p\|_\infty \leq \epsilon$.

Fissato n, per la definizione di norma degli operatori, si ha che

$$\|I_w\|_\infty = \sup_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{|I_w(g)|}{\|g\|_\infty}$$

e dato che $\|I_w\|_\infty = \|w\|_1$

$$|I_w(g)| \leq \|I_w\|_\infty \|g\|_\infty = \|w\|_1 \|g\|_\infty, \quad \forall g \in C([a,b]). \tag{20}$$

Similmente

$$\|S_n\|_\infty = \sup_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{|S_n(g)|}{\|g\|_\infty} = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|$$

implica che se $g \in C([a,b])$ allora

$$|S_n(g)| \leq \|S_n\|_\infty \|g\|_\infty = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|g\|_\infty. \tag{21}$$

Posto $g = f - p$ in $|I_w(g)| \leq \|w\|_1 \|g\|_\infty$, $|S_n(g)| \leq \sum_i |w_i| \|g\|_\infty$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_n(f-p)| &= |I_w(f-p) - S_n(f-p)| \\
&\leq |I_w(f-p)| + |S_n(f-p)| \\
&\leq \|w\|_1 \|f-p\|_\infty + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|f-p\|_\infty \\
&= \left(\|w\|_1 + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) \cdot \|f-p\|_\infty \\
&\leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon.
\end{aligned} \tag{22}$$

Di conseguenza $|\mathcal{E}_n(f-p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si osservi che il secondo membro della precedente disuguaglianza non dipende da n.

Essendo

- $|\mathcal{E}_n(f-p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $|\mathcal{E}_n(p)| \to 0$ (se converge sui monomi converge sui polinomi!),

deduciamo che

$$|\mathcal{E}_n(f)| \quad \leq \quad |\mathcal{E}_n(f-p)| + |\mathcal{E}_n(p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon + |\mathcal{E}_n(p)|$$

e siccome per n sufficientemente grande abbiamo $|\mathcal{E}_n(p)| \leq \epsilon$ visto che $|\mathcal{E}_n(p)| \to 0$, deduciamo che per n sufficientemente grande

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq (\|w\|_1 + M + 1) \cdot \epsilon$$

da cui $|\mathcal{E}_n(f)| \to 0$ per l'arbitrarietà di ϵ.

$\Rightarrow$ (Polya, 1933). Mostriamo che se $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$ per ogni $f \in C(a,b)$ allora esiste $M \in \mathbb{R}$ indipendente da "n" per cui si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M.$$

Supponiamo che per ogni $f \in C([a,b])$ sia $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$. Essendo

$$\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - S_n(f)$$

abbiamo $S_n(f) = I_w(f) - \mathcal{E}_n(f)$ e quindi per la disuguaglianza triangolare e $|I_w(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty$

$$|S_n(f)| \leq |I_w(f)| + |\mathcal{E}_n(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty + |\mathcal{E}_n(f)|.$$

Poichè $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$ necessariamente $\lim_n |\mathcal{E}_n(f)| = 0$ e quindi, dalla definizione di limite, segue facilmente che esiste $M(f) \in \mathbb{R}$ (indipendente da n, ma dipendente da f) tale che

$$|S_n(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty + |\mathcal{E}_n(f)| \leq M(f) < \infty.$$

Il teorema di uniforme limitatezza (talvolta citato come di Banach-Steinhaus) [2, p.58] stabilisce che

- se L_n è una sequenza di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach V a uno spazio di Banach W,
- per ogni $v \in V$ la sequenza $\{L_n(v)\}_n$ è limitata,

allora

$$\sup_n \|L_n\| < +\infty.$$

Nel nostro caso

- $V \equiv (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, $W \equiv \mathbb{R}$ sono spazi di Banach,
- posto $L_n \equiv S_n$, operatore lineare limitato con norma $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|$, se $f \in C([a,b])$ abbiamo che la sequenza $\{S_n(f)\}_n$ è limitata in quanto esiste $M(f) < \infty$ indipendente da n tale che $|S_n(f)| \leq M(f) < \infty$.

Per il teorema di Banach-Steinhaus, da $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|$ si ha

$$\sup_n \left(\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) = \sup_n \|S_n\|_\infty < +\infty.$$

e quindi esiste M finito tale che $\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M < +\infty, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Il secondo punto da dimostrare è ovvio in quanto per ogni k, si ha $x^k \in C([a, b])$.

Nota 1.41.

- *L'intervallo $[a, b]$ è limitato per cui il teorema di Polya* **non è applicabile per funzioni peso quali Gauss-Laguerre e Gauss-Hermite**.
- *Si osservi che in generale le formule di errore introdotte nei capitoli precedenti, implicavano la convergenza in caso l'integranda f fosse sufficientemente regolare. Nel teorema di Polya-Steklov si chiede* **esclusivamente che** *$f \in C([a, b])$, senza però offrire stime dell'errore compiuto.*

Nota 1.42 (Storica, [5, p.318])). *La dimostrazione originale di Polya non utilizzava il teorema di Banach-Steinhaus, bensí mostrava l'esistenza di una funzione f per cui non valeva $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$ se non esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni n si abbia*

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M.$$

Teorema 1.43. *Consideriamo una famiglia di formule di quadratura S_n su un intervallo limitato (a, b), ognuna avente pesi positivi. Allora $\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - S_n(f) \to 0$ per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se $\mathcal{E}_n(p) = I_w(p) - S_n(p) \to 0$ per ogni polinomio p di grado arbitrario.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ allora lo è sicuramente per ogni $p \in \mathcal{P}_n$.

$\Leftarrow$ Per il teorema di Polya-Steklov, basta mostrare che se converge sui polinomi allora, in queste ipotesi, si ha che $\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M$ per ogni n. Poichè converge sui polinomi, lo è in particolare per $p(x) \equiv 1$, da cui

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| = \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} = S_n(1) \;\stackrel{n}{\to}\; I_w(1) = \int_a^b w(x)dx$$

e quindi $\sup_n(\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|) \leq M$ con M indipendente da n.

Teorema 1.44. *Sia S_n una sequenza di formule gaussiane a n punti, relative alla funzione peso $w : (a, b) \to \mathbb{R}$, con (a, b) limitato. Allora $\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - S_n(f) \to 0$ per ogni $f \in C([a, b])$.*

Dimostrazione. Sia una formula di Gauss su un intervallo limitato (a, b), con n nodi $\{w_{i,n}\}_{i=1,\ldots,n}$ positivi. Per quanto detto, è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni monomio x^k. Ma ciò è verificato banalmente in quanto essendo il grado di precisione di una formula gaussiana a n nodi almeno $2n-1$, da cui $n \geq n_k = \text{ceil}((k+1)/2)$ si ha $\mathcal{E}_n(x^k) = 0$, e quindi ovviamente

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0.$$

Dal teorema di Polya-Steklov si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$$

qualsiasi sia la funzione continua $f \in C(a, b)$.

[1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

[2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, 2001.

[3] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.

[4] W. Gautschi, *A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae*, E.B. Christoffel, Birkäuser Verlag, basel, 1981.

[5] G. Hammerlin, K.K. Hoffmann, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, 1991.