

# Cenni alla risoluzione numerica di sistemi nonlineari

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica

10 maggio 2021

# Cenni alla risoluzione numerica di sistemi nonlineari

## Problema. (Soluzione di sistemi nonlineari)

Data una funzione  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si tratta di trovare gli  $\mathbf{x}^* \in \Omega$ , qualora esistenti, tali che  $F(\mathbf{x}^*) = 0$ .

Ci proponiamo di introdurre dei metodi numerici per la risoluzione di tali sistemi nonlineari, talvolta scritti nella forma di punto fisso  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x})$ , ad esempio con  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - F(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

## Esempio

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} \cos(x_2) = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2} \sin(x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Si verifica direttamente che ha un'unica soluzione  $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2)$  con

$$x_1 = 0.48640515466592, \quad x_2 = 0.23372550195872.$$

# Generalizzazione punto fisso e Teorema di Banach

## Teorema (Banach)

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo (dotato della distanza  $d$ ) ed  $M$  un sottoinsieme non vuoto e chiuso di  $X$ . Se  $\phi : M \rightarrow M$  è  $L$  contrattiva cioè

$$d(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) \leq Ld(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad L < 1,$$

allora

- 1** l'equazione  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x})$  ha una ed una sola soluzione  $\mathbf{x}^*$ ;
- 2** la successione  $\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k)$  (detta di Banach o di punto fisso) converge alla soluzione  $\mathbf{x}^*$  per ogni scelta del punto iniziale  $\mathbf{x}_0$ ;
- 3** per  $k = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*) \leq L^k(1 - L)^{-1}d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \text{ a priori}$$

$$d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}^*) \leq L(1 - L)^{-1}d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k), \text{ a posteriori}$$

- 4** per  $k = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}^*) \leq Ld(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*)$$

# Punto fisso per sistemi e Teorema di Banach

## Teorema (Banach in $\mathbb{R}^n$ )

Sia  $\mathbb{R}^n$  (dotato della norma euclidea  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ ) ed  $M$  un sottoinsieme non vuoto e chiuso di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\phi : M \rightarrow M$  è  $L$  contrattiva cioè

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2, \quad L < 1$$

- 1** l'equazione  $x = \phi(x)$  ha una ed una sola soluzione  $x^*$ ;
- 2** la successione  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  (detta di Banach o di punto fisso) converge alla soluzione  $x^*$  per ogni scelta del punto iniziale  $x_0$ ;
- 3** per  $k = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq L^k(1 - L)^{-1}\|x_0 - x_1\|_2, \quad \text{a priori}$$

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq L(1 - L)^{-1}\|x_{k+1} - x_k\|_2, \quad \text{a posteriori}$$

- 4** per  $k = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq L\|x_k - x^*\|_2.$$

# Esempio punto fisso per sistemi

## Esempio

Il sistema (1) è equivalente a risolvere il problema di punto fisso

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \cos(x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2} \sin(x_1) \end{cases} \quad (2)$$

che si scrive come  $\mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$  con  $\mathbf{v} = (x, y)$  e

$$\phi(\mathbf{v}) = \left( \frac{1}{2} \cos(y), \frac{1}{2} \sin(x) \right).$$

Si dimostra che  $\phi$  è  $L$ -contrazione con  $L = 1/2$ . Per applicare il teorema di punto fisso per sistemi basta porre  $M = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  e osservare che

$$\phi(M) \subseteq [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \subset M$$

in quanto  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

# Esempio punto fisso per sistemi

Mostriamo che  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una contrazione. Dalla formula di Taylor in  $\mathbb{R}^2$

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}_0) + J\phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \quad \boldsymbol{\xi} \in S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0), \quad i = 1, 2$$

con  $S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$  il segmento che congiunge  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{v}_0$  e  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ , con  $J\phi$  la matrice Jacobiana di  $\phi$  valutata in  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Da

$$J\phi(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & (-1/2) \sin(v_1) \\ (+1/2) \cos(v_2) & 0 \end{pmatrix}$$

essendo  $\|A\|_\infty = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$ , si ha

$$\|J\phi(\mathbf{v})\|_\infty = \max_j \sum_i |(J\phi(\mathbf{v}))_{i,j}| = \max(|(-1/2) \sin(v_1)|, |(+1/2) \cos(v_2)|) \leq \frac{1}{2}$$

Quindi  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una  $L$ -contrazione con  $L = 1/2$  poiché

$$\|\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{v}_0)\|_\infty \leq \|J\phi(\boldsymbol{\xi})\|_\infty \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_\infty.$$

# Metodo Punto fisso per sistemi, in Matlab

```
function [x, flag]=punto_fisso(x0,maxit,tol,g)
% INPUT.
% x0      : PUNTO INIZIALE (VETTORE COLONNA).
% maxit   : NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI.
% tol     : TOLLERANZA CRITERIO DI ARRESTO.
% g       : EQUAZIONE DA RISOLVERE x=g(x)
% OUTPUT.
% x       : ITERAZIONI PUNTO FISSO.
% flag    : 0: TERMINAZIONE CORRETTA, 1: NON CORRETTA.

x=x0; flag=0;
for index=1:maxit
    x(:,end+1)=feval(g,x(:,end));
    if norm(x(:,end)-x(:,end-1),inf) < tol, return; end
end
flag=1;
```

```
function res=phi(v)
res=0.5*[cos(v(2)); sin(v(1))];
```

```
>> x0=[0; 0];maxit=1000;tol=10^(-14);
>> x=punto_fisso(x0,maxit,tol,'phi');
>> size(x)
ans =
     2     24
>> >> format long e; xhist(:,end)
ans =
 4.864051546659212e-01
 2.337255019587215e-01
>>
```

## Esempio punto fisso per sistemi

La successione punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \cos(y_k), \quad y_{k+1} = \frac{1}{2} \sin(x_k)$$

fornisce le seguenti iterazioni:

| $x_k$              | $y_k$              |
|--------------------|--------------------|
| 0.0000000000000000 | 0.0000000000000000 |
| 0.5000000000000000 | 0.0000000000000000 |
| 0.5000000000000000 | 0.23971276930210   |
| 0.48570310513698   | 0.23971276930210   |
| 0.48570310513698   | 0.23341513183103   |
| 0.48644107261515   | 0.23341513183103   |
| ...                | ...                |
| 0.48640515466592   | 0.23372550195872   |

## Metodo Newton per sistemi

Supponiamo di dover risolvere  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  con  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

La successione di Newton viene descritta come

$$\begin{cases} Jf(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{h}_{k+1} = -f(\mathbf{x}_k), \\ \mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{h}_{k+1} \end{cases} \quad (3)$$

dove  $Jf$  è la matrice Jacobiana di  $f$  cioè se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  allora

$$(Jf(\mathbf{x}_k))_{i,j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Si noti che ad ogni iterazione si deve risolvere il sistema lineare

$$Jf(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{h}_{k+1} = -f(\mathbf{x}_k).$$

# Esempio Newton per sistemi

## Teorema (Convergenza globale del metodo di Newton)

Se  $f = (f_i) : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^2(K)$  dove

- $K$  è la chiusura di un aperto convesso e limitato contenente una soluzione  $\mathbf{x}^*$ ,
- la Jacobiana  $JF(\mathbf{x}^*)$  è invertibile,
- le iterazioni  $\mathbf{x}_n$  siano tutte in  $K$ ,

posto  $e_n = \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\|_2$ , vale la seguente stima (convergenza almeno quadratica)

$$e_{n+1} \leq C e_n, \quad n \geq 0$$

con

$$C = \frac{\sqrt{m}}{2} \max_{\mathbf{x} \in K} \|(Jf(\mathbf{x}))^{-1}\|_2 \max_{i=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in K} \|Hf_i(\mathbf{x})\|_2$$

dove  $Hf_i$  è la *matrice Hessiana* della componente  $f_i$ .

# Esempio Newton per sistemi

## Teorema (Convergenza locale del metodo di Newton)

Se  $f = (f_i) : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^2(K)$  dove

- $K = B_2(\mathbf{x}^*, r)$  ovvero la palla chiusa centrata in  $\mathbf{x}^*$ , avente raggio  $r$ , relativamente alla norma euclidea  $\|\cdot\|_2$ ,
- $Jf(\mathbf{x}^*)$  è invertibile in  $K$ ,
- $C = \frac{\sqrt{m}}{2} \max_{\mathbf{x} \in K} \|(Jf(\mathbf{x}))^{-1}\|_2 \max_{i=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in K} \|Hf_i(\mathbf{x})\|_2$

scelto  $\mathbf{x}_0$  tale che  $e_0 < \min\{1/C, r\}$ , il metodo di Newton é convergente e vale la seguente stima dell'errore

$$Ce_n \leq (Ce_0)^{2^n}, \quad n \geq 0.$$

# Esempio Newton per sistemi

## Esempio

Consideriamo il precedente esempio, come  $f(x) = 0$ .

Posto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , si ha  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  con

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{2} \cos(x_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2} \sin(x_1).$$

e inoltre

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \sin(x_2) \\ -\frac{1}{2} \cos(x_1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

# Metodo Newton per sistemi, in Matlab

```
function [x, steps, flag]=newton_sistemi(x,maxit,tol,F,JF)
% INPUT.
% x      : PUNTO INIZIALE (VETTORE COLONNA).
% maxit  : NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI.
% tol    : TOLLERANZA CRITERIO DI ARRESTO.
% g      : EQUAZIONE DA RISOLVERE x=g(x)
% F      : FUNZIONE DI CUI STUDIARE GLI ZERI.
% JF     : JACOBIANA DI F.
% OUTPUT.
% x      : ITERAZIONI NEWTON.
% steps: NORMA 2 DEGLI STEP.
% flag   : 0: TERMINAZIONE CORRETTA, 1: NON CORRETTA.

flag=0; steps=[];
for index=1:maxit
    Fv=feval(F,x(:,index)); JFv=feval(JF,x(:,index));
    h=-JFv\Fv; x(:,index+1)=x(:,index)+h;
    steps(index)=norm(h,2); if steps(index) < tol, return; end
end
flag=1;
```

```
function res=F(v)
res(1,1)=0.5*cos(v(2))-v(1); res(2,1)=0.5*sin(v(1))-v(2);
```

```
function res=DF(v)
res=[-1 -0.5*sin(v(2)); 0.5*cos(v(1)) -1];
```

# Metodo Newton per sistemi, in Matlab

Scriviamo quindi sulla shell di Matlab

```
>> format long e;  
>> x=[0; 0]; maxit=1000; tol=10(-14);  
>> [x, steps, flag]=newton_sistemi(x,maxit,tol,'F','JF');  
>> x(:,end)  
ans =  
    4.864051546659213e-01  
    2.337255019587208e-01  
>> steps'  
ans =  
    5.590169943749475e-01  
    2.113171789351138e-02  
    7.529280144355773e-05  
    7.761579629563876e-10  
    0  
>>
```

Dai risultati si evince che il metodo di Newton ha fornito i risultati esatti, partendo dal vettore nullo, in sole 5 iterazioni.

# Esempio Newton per sistemi

Successione Newton:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{v}_k) \cdot h_{k+1} = -f(\mathbf{v}_k), \\ \mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{v}_k + h_{k+1} \end{cases} \quad (5)$$

| $x_k$              | $y_k$              |
|--------------------|--------------------|
| 0.0000000000000000 | 0.0000000000000000 |
| 0.5000000000000000 | 0.2500000000000000 |
| 0.4864635133551991 | 0.2337730769877319 |
| 0.4864051551457132 | 0.2337255025688199 |
| 0.4864051546659213 | 0.2337255019587208 |
| 0.4864051546659213 | 0.2337255019587208 |

## Esercizio

*Si calcoli la soluzione del sistema nonlineare*

$$\begin{aligned}x_1 &= \arctan(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_2)/10 \\x_2 &= \cos(x_1/4) + \sin(x_2/4)\end{aligned}\tag{6}$$

*con il metodo di punto fisso e di Newton.*

*Convergono entrambi, qualora l'origine sia il punto iniziale?*