

# APPROSSIMAZIONE E INTERPOLAZIONE CON POLINOMI ALGEBRICI \*

A. SOMMARIVA †

**Conoscenze richieste.** Spazio vettoriale. Spazio normato. Topologia indotta. Polinomi algebrici. Operatore delta di Kronecker.

**Conoscenze ottenute.** Migliore approssimazione in spazi normati. Migliore approssimazione in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  con polinomi algebrici. Teorema di Weierstrass. Teoremi di Jackson. Polinomi di Chebyshev. Costanti di Lebesgue.

**Ore necessarie.** 4 in aula e 2 di laboratorio.

**1. Migliore approssimazione con polinomi algebrici in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .** Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado  $n$ , aventi come noto dimensione  $N_n = n + 1$ .

Risulta evidente che se  $S_n \equiv \mathbb{P}_n$  si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

Inoltre se  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è lo spazio normato delle continue  $C([a, b])$  in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

si ha che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subseteq (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

**TEOREMA 1.1.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio funzionale normato e*

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

*una successione crescente di sottospazi di dimensione finita  $N_n = \dim(S_n)$ . Allora*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

*se e solo se  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .*

**DIMOSTRAZIONE.**

Supponiamo sia  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$  per ogni  $f \in X$ . Sia  $f \in X$  e sia fissato un arbitrario  $\epsilon > 0$ . Allora per un qualche  $n$  si ha  $E_n(f) < \epsilon/2$  e dalle proprietà dell'estremo inferiore si ha pure che esiste  $p \in S_n$  tale che  $\|p - f\| < \epsilon$ . Di conseguenza per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un certo  $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|p - f\| < \epsilon$ , cioè  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .

Viceversa supponiamo che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  sia denso in  $X$  e che sia  $f \in X$ . Essendo

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

---

\*Ultima revisione: 1 marzo 2014

†DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121  
PADOVA, ITALIA (ALVISE@MATH.UNIPD.IT)

la successione  $E_n(f)$  è decrescente e quindi ammette limite. Essendo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  denso in  $X$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un elemento  $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|f - p\| \leq \epsilon$  e quindi  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ .  $\square$

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densità.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [5, p.107].

**TEOREMA 1.2.** *Ogni funzione continua in  $[a, b]$  è limite uniforme di una successione di polinomi.*

Il Teorema 1.2 è equivalente a dire che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n$  è denso in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  e quindi dal Teorema 1.1 deduciamo che se  $f \in C([a, b])$  allora  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ .

Osserviamo che (cf. [6, p.151])

**LEMMA 1.3.** *Una funzione continua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono  $x_{\min}$  ed  $x_{\max}$  tali che*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

per ogni  $x \in S$ . e che inoltre (cf. [6, p.150])

**LEMMA 1.4.** *In uno spazio normato di dimensione finita, un insieme è compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Inoltre

**LEMMA 1.5.** *Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $f \in X$ . Sia  $S \subset X$  e  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ . La funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in ogni punto di  $S$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che se  $x, y \in X$  allora si vede facilmente che

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Fissato  $\epsilon > 0$ ,  $x \in S$ , sia  $\delta = \epsilon$ . Allora se  $y \in S$  e  $\|x - y\| \leq \delta = \epsilon$  abbiamo che

$$|d(f, x) - d(f, y)| = \||f - x| - |f - y|\| \leq \|(f - x) - (f - y)\| = \|x - y\| \leq \epsilon$$

e quindi la funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in  $x \in S$ .  $\square$

Siamo quindi in grado di affermare che

**TEOREMA 1.6.** *Sia  $S_k$  un sottospazio vettoriale di uno spazio normato  $X$ . Si supponga che  $S_k$  sia di dimensione finita e  $f$  sia un certo elemento di  $X$ . Allora esiste esiste  $s_k^* \in S_k$ , detto di miglior approssimazione di  $f$  in  $S_k$ , tale che*

$$\|f - s_k^*\| = \min_{s \in S_k} \|f - s\|.$$

**DIMOSTRAZIONE.** L'elemento 0 dello spazio normato  $X$  appartiene certamente a ogni sottospazio  $S_k$ . Quindi sicuramente  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|$ . La funzione  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$  è continua. Inoltre essendo lo spazio  $S_n$  di dimensione finita, la palla  $B(f, \|f\|) = \{p \in S_n : \|p - f\| \leq \|f\|\}$  centrata in  $f$  e avente raggio  $\|f\|$  essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta e quindi per il teorema di Weierstrass la funzione  $d(f, \cdot)$  ha minimo in  $B(0, \|f\|)$  e di conseguenza in  $S_n$ .  $\square$

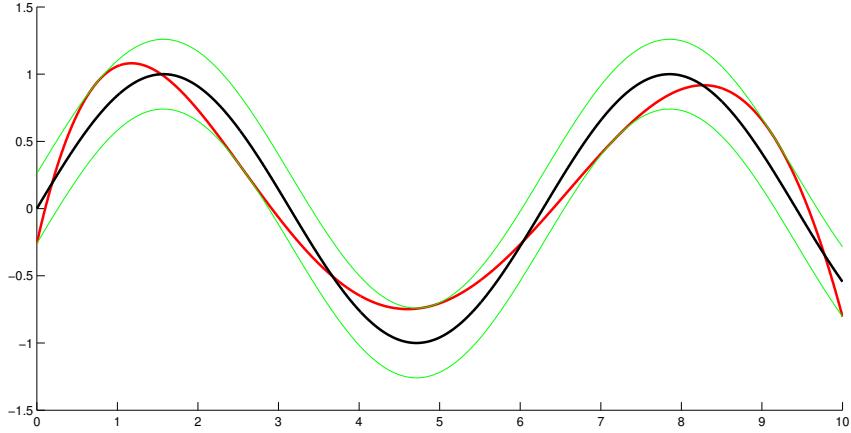


FIGURA 1.1. Equioscillazione: in nero  $\sin(x)$  in  $[-5, 5]$ , in rosso il polinomio di polinomio di miglior approssimazione di grado 5, in verde le funzioni  $f \pm E_n(f)$ .

Di conseguenza per ogni grado  $k$ , fissata  $f \in (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  esiste un polinomio  $p_k^* \in \mathbb{P}_k$  di miglior approssimazione.

Per quanto concerne l'unicità del polinomio di miglior approssimazione, vale il seguente teorema dovuto a Chebyshev e noto come di equi-oscillazione (cf. [2], p. 112 oppure [3], [5, p.149]).

**TEOREMA 1.7.** *Sia  $f \in C([a, b])$  con  $[a, b]$  limitato e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora esiste un unico elemento  $p_n^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono  $n + 2$  elementi  $a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$  non necessariamente unici tali che*

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty, \quad j = 0, 1, \dots, n + 1$$

con  $\sigma = 1$  oppure  $\sigma = -1$ .

Il calcolo del polinomio  $p^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione di una funzione  $f \in C([a, b])$  non è semplice. L'algoritmo di Remez ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice. Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [4]). Il relativo comando si chiama `remez`.

Digitando sulla shell di Matlab

```
>> deg=10;
>> x=chebfun('x',[-5 5]);
>> f=1./(1+x.^2);
>>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in  $p$  il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della funzione di Runge  $1/(1 + x^2)$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  (come stabilito dalla seconda riga).

Dalla Tabella 1.1, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a parità di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al  $|x - 4|$  e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante. Queste vengono fornite dai seguenti teoremi di Jackson [3, p.142], [1, p.224]

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $ x-4 $	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e-01$	$1.61e-01$	$1.08e-01$
10	$6.59e-02$	$8.40e-02$	$7.03e-04$
15	$2.98e-02$	$5.68e-02$	$2.31e-08$
20	$9.04e-03$	$4.28e-02$	$6.69e-12$
25	$4.08e-03$	$3.43e-02$	$2.33e-15$
30	$1.24e-03$	$2.86e-02$	—
35	$5.60e-04$	$2.46e-02$	—
40	$1.70e-04$	$2.15e-02$	—
45	$7.68e-05$	$1.91e-02$	—
50	$2.33e-05$	$1.72e-02$	—
55	$1.05e-05$	$1.56e-02$	—
60	$3.20e-06$	$1.43e-02$	—
65	$1.44e-06$	$1.32e-02$	—
70	$4.38e-07$	$1.23e-02$	—
75	$1.98e-07$	$1.14e-02$	—
80	$6.01e-08$	$1.07e-02$	—
85	$2.71e-08$	$1.01e-02$	—
90	$8.24e-09$	$9.51e-03$	—
95	$3.72e-09$	$9.00e-03$	—
100	$1.13e-09$	$8.55e-03$	—

TABELLA 1.1

Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior interpolazione relativamente alla funzione di Runge  $1/(1+x^2)$ ,  $|x-4|$  e  $\sin(x)$  in  $[-5, 5]$ .

TEOREMA 1.8. Per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $f \in C([a, b])$  esiste una costante  $M$  indipendente da  $n$ ,  $a$ ,  $b$  tale che

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \omega \left( f, \frac{b-a}{n} \right)$$

dove  $\omega(f, \cdot)$  è il modulo di continuità della funzione  $f$  su  $[a, b]$ , cioè

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

TEOREMA 1.9. Se  $f \in C^p([a, b])$ ,  $p \geq 0$  si ha per ogni  $n > p$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \omega \left( f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p} \right).$$

TEOREMA 1.10. Se  $f \in C^k([a, b])$ , ed  $f^{(k)}$  è  $\alpha$  holderiana, cioè

$$\sup_{x, y \in [a, b]} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

per qualche  $M > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Allora esiste una costante  $d_k$  indipendente da  $f$  e  $n$  per cui

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M d_k}{n^{k+\alpha}}, \quad n \geq 1.$$

Per i prossimi teoremi serve definire delle funzioni in campo complesso (cf. [5, p.12]).

**DEFINIZIONE 1.11.** Sia  $R$  una regione del piano complesso e sia  $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $z_0 \in R$ ,  $f$  si dice analitica in  $z_0$  se ha una rappresentazione della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di  $z_0$ .

Una funzione si dice analitica in  $R$  se e solo se è analitica in ogni punto di  $R$ .

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $\exp(z)$ . La funzione di Runge  $1/(1 + z^2)$  è analitica in ogni regione non contenente  $-i$  e  $+i$ .

**TEOREMA 1.12.** Se  $f$  è analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[a, b]$ , allora esiste  $\theta \in (0, 1)$  tale che  $E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n)$ . Inoltre se  $f$  è intera (cioè si può scegliere  $\Omega = \mathbb{C}$ ) allora la convergenza è superlineare, cioè

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{1/n} = 0.$$

Per quanto visto, la funzione di Runge  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è olomorfa in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[-5, 5]$  (si noti che possiede i soli poli in  $-i$  e  $i$ ) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che  $\theta \approx 0.814$ .

La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di  $f(x) = \sin(x)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è molto rapida. In effetti tale funzione è intera e quindi la convergenza superlineare.

Nel caso di  $f(x) = |x - 4|$  da  $\|x - 4| - |y - 4|\| \leq |x - y|$  e dal fatto che per  $x \leq 4$  si ha  $f(x) = 4 - x$  mentre per  $x > 4$  si ha  $f(x) = x - 4$  si vede facilmente che

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| = \delta$$

e quindi dal Teorema 1.8 che per qualche  $M$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{b - a}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti  $a = -5$  e  $b = 5$  (estremi dell'intervallo)

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{b - a}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di  $E_n(f)$  a 0, se paragonata alla quantità  $E_n(f) \approx 0.814^n$  trovata nell'esempio di Runge.

**2. Alcune note sui polinomi di Chebyshev.** Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con  $x \in [-1, 1]$  (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno,  $T_n$  non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che  $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$ ,  $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$ . Da note formule trigonometriche

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta) \\ \cos((n-1)\theta) &= (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

sommendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

Posto  $\theta = \arccos(x)$  si ha

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

da cui

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Di conseguenza, per ricorrenza, si deduce che  $T_n$  è un polinomio di grado  $n$  e che inoltre per  $n > 0$  è del tipo  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ .

Gli zeri  $x_k$  del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui  $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$ , per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev  $T_n$  sono esattamente  $n$ , distinti e nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**3. Costanti di Lebesgue.** Sia  $f \in C([a, b])$ , con  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio  $p_n \in \mathbb{P}_n$  che interpola le coppie  $(x_k, f(x_k))$  (per  $k = 0, \dots, n$ ,  $x_k$  a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione  $f_k := f(x_k)$ . Come è noto, indicato con  $L_k$  il  $k$ -simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x).$$

Supponiamo che i valori di  $f_k$  siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con  $\tilde{f}_k$ . Otteniamo quindi quale polinomio interpolatore

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x).$$

Si ha così che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

e quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

si ha

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Il valore  $\Lambda_n$  è nota come *costante di Lebesgue* dell'insieme di punti  $x_0, \dots, x_n$  (cf. [10]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [3, p.139-140]).

Ricordiamo che se  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sono due spazi normati,  $A : X \rightarrow Y$  è un operatore lineare limitato se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito. Il numero reale  $\|A\|$  si chiama *norma dell'operatore lineare*  $A$  (cf. [7, p.224]).

Si può mostrare che se  $\mathcal{L}_n$  è l'operatore (lineare e limitato) che associa a  $f \in C([a,b])$  il suo polinomio di interpolazione nei nodi  $x_0, \dots, x_n$  allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|L_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione  $\mathcal{L}_n$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**TEOREMA 3.1.** *Se  $f \in C([a,b])$  e  $p_n$  è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti  $x_0, \dots, x_n$  si ha*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \quad (3.1)$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

**DIMOSTRAZIONE.**

Se  $f \in \mathcal{P}_n$ , allora  $f \equiv p_n \equiv q_n$  e quindi l'asserto è ovvio. Supponiamo quindi che  $f$  non appartenga a  $\mathcal{P}_n$ , cioè  $f - q_n$  non sia la funzione nulla, qualsiasi sia  $q_n \in \mathcal{P}_n$ .

Per ogni polinomio  $q_n \in \mathcal{P}_n$ , è  $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$ , in quanto l'unico polinomio che interpola in  $n + 1$  punti distinti un polinomio di grado  $n$  è il polinomio stesso. Inoltre

$$\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

Poichè  $f - q_n$  non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \quad (3.2)$$

e di conseguenza

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \quad (3.3)$$

Per concludere, osserviamo che per la diseguaglianza triangolare da  $f - p = (f - q) + (q - p)$  e (3.3)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

□

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è poco più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.



FIGURA 3.1. *Henri Lebesgue (1875-1941).*

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di  $n + 1$  punti  $x_0, \dots, x_n$  particolarmente interessanti, nell'intervallo  $[-1, 1]$  (cf. [8]):

1. punti equispaziati: si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente  $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)}$  (cf. [3, p.142]);
2. punti di Chebyshev: corrispondono a  $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)}$  dove  $k = 1, \dots, n + 1$ ; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \frac{8}{\pi} \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove  $\gamma \approx 0.577$  è la costante di Eulero-Mascheroni (cf. [9]);

3. punti di Chebyshev estesi: sono definiti da  $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1) \cdot \cos(\frac{\pi}{2n+1})}$  dove  $k = 1, \dots, n+1$ ; si dimostra che la costante di Lebesgue relativa a questi punti vale asintoticamente

$$\frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log \left( \frac{8}{\pi} \right) - \frac{2}{3} \right) + O \left( \frac{1}{\log(n+1)} \right);$$

4. configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log \left( \frac{4}{\pi} \right) \right) + O \left( \frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)} \right)$$

Vediamo usando Matlab quanto siano differenti tali costanti per gradi  $n$  quali 5, 10, ..., 50.

```
>> n=(5:5:50)'; % VETTORE COLONNA DI GRADI.
>> % NODI EQUISPAZIATI.
>> s =(2.^ (n+1))./(exp(1)*n.* log (n));
>> % NODI CHEBYSHEV.
>> % \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log \left( \frac{8}{\pi} \right) - \frac{2}{3} \right)
>> % + \frac{8}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log \left( \frac{4}{\pi} \right) \right) + O \left( \frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)} \right)
>> t =(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) );
>> [s t]

ans =
2.9258e+000 3.1291e+000
3.2720e+001 3.5150e+000
5.9352e+002 3.7536e+000
1.2877e+004 3.9267e+000
3.0679e+005 4.0626e+000
7.7425e+006 4.1746e+000
2.0316e+008 4.2698e+000
5.4825e+009 4.3526e+000
1.5112e+011 4.4259e+000
4.2351e+012 4.4915e+000
>>
```

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perché i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

#### 4. Esercizi.

- (Non facile, e richiede qualche conto su carta). Si implementi un codice Matlab che approssimi la costante di Lebesgue di un set di punti  $x_0, \dots, x_n$  in un intervallo prefissato  $[a, b]$ , valutando la funzione di Lebesgue  $\sum_{k=0}^n |L_k(x)|$  (dove al solito  $L_k$  è il  $k$ -simo polinomio di Lagrange) in  $M = 1000$  punti test equispaziati in  $[a, b]$ . In seguito si valuti con tale codice la costante di Lebesgue di un set di 10 punti equispaziati in  $[-1, 1]$  e in 10 punti di Chebyshev.
- (Facile, ma un po' lungo). Sfruttando i valori citati (a meno di  $O$  grandi), si confrontino i valori delle costanti di Lebesgue per i nodi equispaziati, di Chebyshev e di Chebyshev estesi.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
- [3] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [4] Chebfun, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972-chebfun>
- [5] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

- [6] D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.
- [7] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.
- [8] S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) <http://www.ektf.hu/tanszek/mathematika/ami>.
- [9] Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), [http://it.wikipedia.org/wiki/Costante\\_di\\_Eulero-Mascheroni](http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni).
- [10] Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), [http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue\\_constant\\_\(interpolation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation)).