Approssimazione e interpolazione con polinomi algebrici

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

11 marzo 2014

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n =< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado n, aventi come noto dimensione $N_n = n + 1$.
Risulta evidente che se $S_n \equiv \mathbb{P}_n$ si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

Inoltre se $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è lo spazio normato delle continue $C([a,b])$ in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

si ha che $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subseteq (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Definizione

Un insieme S si dice denso in uno spazio normato X se per ogni $x \in X$, fissato $\epsilon > 0$, esiste $s \in S$ tale che $\|x - s\| < \epsilon$.

Equivalentemente,

Definizione

Un insieme S si dice denso in uno spazio normato X si dice denso in X, se per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{s_n\}$ di elementi di S tale che $s_n \to x$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio funzionale normato e*

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

una successione crescente di sottospazi di dimensione finita $N_n = dim(S_n)$. *Allora*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

se e solo se $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *è denso in* X.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ *Supponiamo sia* $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ *per ogni* $f \in X$. *Sia* $f \in X$ *e sia fissato un arbitrario* $\epsilon > 0$. *Allora per un qualche* n *si ha* $E_n(f) < \epsilon/2$ *e dalle proprietà dell'estremo inferiore si ha pure che esiste* $p \in S_n$ *tale che* $\|p - f\| < \epsilon$.

Di conseguenza per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un certo* $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *tale che* $\|p - f\| < \epsilon$, *cioè* $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *è denso in* X.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ Viceversa sia $\cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ denso in X ed $f \in X$.

Essendo

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

la successione $E_n(f)$ è decrescente e quindi ammette limite.

Essendo $\cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ denso in X, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $p \in \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ tale che $\|f - p\| \leq \epsilon$ e quindi $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$.

□

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densitá.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [5, p.107].

Teorema

Ogni funzione continua in [a, b] è limite uniforme di una successione di polinomi.

Tale Teorema è equivalente a dire che $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n$ è denso in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ e quindi dal Teorema 0.1 deduciamo che se $f \in C([a,b])$ allora $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Miriamo a mostrare l'esistenza di un elemento di miglior appross., sotto particolari condizioni. Osserviamo che (cf. [6, p.151])

Lemma

Una funzione continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, con S sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono x_{min} ed x_{max} tali che

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

per ogni $x \in S$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Inoltre (cf. [6, p.150])

Lemma

In uno spazio normato di dimensione finita, un insieme è compatto se e solo se chiuso e limitato.

Infine

Lemma

Sia X uno spazio normato e sia $f \in X$. Sia $S \subset X$ e $d(f,\cdot) = \|f - \cdot\|$. La funzione $d(f,\cdot)$ è continua in ogni punto di S.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

Osserviamo che se $x, y \in X$ allora si vede facilmente che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Fissato $\epsilon > 0$, $x \in S$, sia $\delta = \epsilon$. Allora se $y \in S$, $\|x - y\| \leq \delta = \epsilon$

$$\begin{aligned} |d(f,x) - d(f,y)| &= |\|f - x\| - \|f - y\|| \\ &\leq \|(f - x) - (f - y))\| = \|x - y\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi la funzione $d(f, \cdot)$ è continua in $x \in S$. □

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Siamo quindi in grado di affermare che

Teorema

Sia S_k un sottospazio vettoriale di uno spazio normato X. Si supponga che S_k sia di dimensione finita e f sia un certo elemento di X. Allora esiste esiste $s_k^* \in S_k$, detto di miglior approssimazione di f in S_k, tale che

$$\|f - s_k^*\| = \min_{s \in S_k} \|f - s\|.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

L'elemento 0 dello spazio normato X appartiene certamente a ogni sottospazio S_k. Quindi sicuramente $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|$. La funzione $d(f,\cdot) = \|f - \cdot\|$ è continua. Inoltre essendo lo spazio S_n di dimensione finita, la palla $B(f, \|f\|) = \{p \in S_n : \|p - f\| \leq \|f\|\}$ centrata in f e avente raggio $\|f\|$ essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta e quindi per il teorema di Weierstrass la funzione $d(f,\cdot)$ ha minimo in $B(f,\|f\|)$ e di conseguenza in S_n. $\square$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Di conseguenza per ogni grado k, fissata $f \in (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ esiste un polinomio $p_k^* \in \mathbb{P}_k$ di miglior approssimazione.

Riguardo l'unicità di tale p_k^*, vale il teorema di *equi-oscillazione* (di Chebyshev) (cf.[2], p.112, [3], [5, p.149]).

Teorema

Sia $f \in C([a,b])$ con $[a,b]$ limitato e $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico elemento $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono $n+2$ elementi $a \le x_0 < \ldots < x_{n+1} \le b$ non necessariamente unici tali che

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f-p\|_\infty, \;\; j = 0, 1, \ldots, n+1$$

con $\sigma = 1$ oppure $\sigma = -1$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

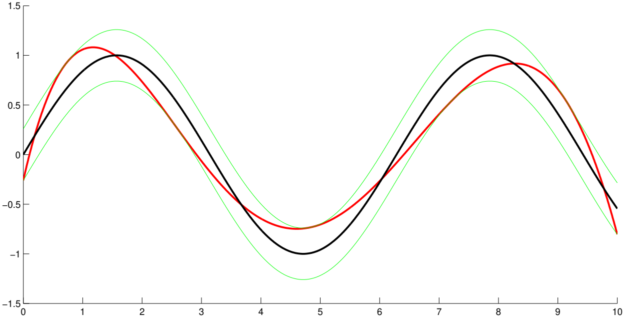

Figura: Equioscillazione: in nero $\sin(x)$ in $[0, 10]$, in rosso il polinomio di miglior approssimazione p_5^* di grado 5, in verde le funzioni $f \pm E_n(f)$. Si notino le 7 intersezioni dell'approssimante p_5^* con il grafico di $f \pm E_n(f)$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Il calcolo del polinomio $p^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione di una funzione $f \in C([a,b])$ non è semplice.

L'algoritmo di Remez ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice. Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [4]). Il relativo comando si chiama `remez`.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Digitando sulla shell di Matlab

```
>>deg=10;
>> x=chebfun('x',[-5 5]);
>> f=1./(1+x.^2);
>>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in p il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ (come stabilito dalla seconda riga).

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $\lvert x-4\rvert$	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e-01$	$1.61e-01$	$1.08e-01$
10	$6.59e-02$	$8.40e-02$	$7.03e-04$
15	$2.98e-02$	$5.68e-02$	$2.31e-08$
20	$9.04e-03$	$4.28e-02$	$6.69e-12$
25	$4.08e-03$	$3.43e-02$	$2.33e-15$
30	$1.24e-03$	$2.86e-02$	$-$
35	$5.60e-04$	$2.46e-02$	$-$
40	$1.70e-04$	$2.15e-02$	$-$
45	$7.68e-05$	$1.91e-02$	$-$
50	$2.33e-05$	$1.72e-02$	$-$
55	$1.05e-05$	$1.56e-02$	$-$
60	$3.20e-06$	$1.43e-02$	$-$
65	$1.44e-06$	$1.32e-02$	$-$
70	$4.38e-07$	$1.23e-02$	$-$
75	$1.98e-07$	$1.14e-02$	$-$
80	$6.01e-08$	$1.07e-02$	$-$
85	$2.71e-08$	$1.01e-02$	$-$
90	$8.24e-09$	$9.51e-03$	$-$
95	$3.72e-09$	$9.00e-03$	$-$
100	$1.13e-09$	$8.55e-03$	$-$

Tabella: Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior approssimazione relativamente a $1/(1+x^2)$, $|x-4|$ e $\sin(x)$ in $[-5,5]$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dalla Tabella, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a paritá di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al $|x-4|$ e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante.

Queste vengono fornite dai seguenti **teoremi di Jackson** [3, p.142], [1, p.224]

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema

Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $f \in C([a,b])$ esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M\omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove $\omega(f,\cdot)$ è il modulo di continuità della funzione f su [a,b], cioè

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema

Se $f \in C^p([a,b])$, $p \geq 0$ si ha per ogni $n > p$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1)} \omega \left(f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p} \right).$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \| \cdot \|_{\infty})$

Teorema

Se $f \in C^k([a, b])$, ed $f^{(k)}$ è α holderiana, cioè

$$\sup_{x,y \in [a,b]} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}$$

per qualche $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Allora esiste una costante d_k indipendente da f e n per cui

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty} \leq \frac{M\, d_k}{n^{k+\alpha}},\ n \geq 1.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Ricordiamo che (cf. [5, p.12]).

Definizione

Sia R una regione del piano complesso e sia $f : R \to \mathbb{C}$. Se $z_0 \in R$, f si dice analitica in z_0 se ha una rappresentazione della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di z_0.

Definizione

Una funzione si dice analitica in R se e solo se è analitica in ogni punto di R.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\exp(z)$. La funzione di Runge $1/(1+z^2)$ è analitica in ogni regione non contenente $-i$ e $+i$.

Teorema

Se f è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[a,b]$, allora esiste $\theta \in (0,1)$ tale che $E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n)$. Inoltre se f è intera (cioè si può scegliere $\Omega = \mathbb{C}$) allora la la convergenza è superlineare, cioè

$$\limsup_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} = 0.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

- Per quanto visto, la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$, con $x \in [-5,5]$ è olomorfa in un aperto Ω del piano complesso contenente $[-5,5]$ (si noti che possiede i soli poli in $-i$ e i) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che $\theta \approx 0.814$.
- La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di $f(x) = \sin(x)$, con $x \in [-5,5]$ è molto rapida. In effetti tale funzione è intera e quindi la convergenza superlineare.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

- Nel caso di $f(x) = |x-4|$ da $||x-4| - |y-4|| \leq |x-y|$ e dal fatto che per $x \leq 4$ si ha $f(x) = 4 - x$ mentre per $x > 4$ si ha $f(x) = x - 4$ si vede facilmente che

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| = \delta$$

e quindi dal Teorema di Jackson che per qualche M

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{b-a}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti $a = -5$ e $b = 5$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di $E_n(f)$ a 0, se paragonata alla quantità $E_n(f) \approx 0.814^n$ trovata nell'esempio di Runge.

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con $x \in [-1, 1]$ (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno, T_n non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$,
$T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$. Da note formule trigonometriche

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \\ \cos((n-1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \quad (2)\end{aligned}$$

sommando membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Posto $\theta = \arccos(x)$ si ha

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

poiché

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2\,T_n(x)x$$

Di conseguenza, per ricorrenza, si deduce che T_n è un polinomio di grado n e che inoltre per $n > 0$ è del tipo $T_n(x) = 2^{n-1}\,x^n + \cdots$.

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Gli zeri x_k del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$, per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \; k = 0, \ldots, n-1.$$

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev T_n,

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1$$

sono

- esattamente n,
- distinti,
- nell'intervallo $[-1, 1]$.

Costanti di Lebesgue

Sia $f \in C([a,b])$, con $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \ldots, n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$. Come è noto, indicato con L_k il k-simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_j - x_k).$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con $\tilde{f}_k$.

Costanti di Lebesgue

Quindi il polinomio interpolatore è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k L_k(x)$.
Essendo $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$ abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k - \tilde{f}_k||L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

Costanti di Lebesgue

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero Λ_n dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

Costanti di Lebesgue

Il valore Λ_n è nota come **costante di Lebesgue** dell'insieme di punti $x_0, \ldots, x_n$ (cf. [10]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [3, p.139-140]).

Ricordiamo che se $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, $A : X \to Y$ è un **operatore lineare limitato** se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito.

Il numero reale $\|A\|$ si chiama **norma dell'operatore lineare** A (cf. [7, p.224]).

Costanti di Lebesgue

Si può mostrare che se $\mathcal{L}_n$ è l'operatore (lineare e limitato) che associa a $f \in C([a,b])$ il suo polinomio di interpolazione nei nodi $x_0, \ldots, x_n$ allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Costanti di Lebesgue

Teorema

Se $f \in C([a,b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \ldots, x_n$ si ha

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \tag{3}$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

Costanti di Lebesgue

Dimostrazione.

Se $f \in \mathcal{P}_n$, allora $f \equiv p_n \equiv p_n^*$, con p_n^* elemento di miglior approssimazione e quindi l'asserto è ovvio. Supponiamo quindi che $f \notin \mathcal{P}_n$, cioè $f - q_n \neq 0$, per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$.
Per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$, è $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$, in quanto l'unico polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti un polinomio di grado n è il polinomio stesso. Inoltre

$$\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

Poichè $f - q_n$ non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \tag{4}$$

Costanti di Lebesgue

Dimostrazione.

e di conseguenza

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \tag{5}$$

Per concludere, osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da $f - p = (f - q) + (q - p)$ e (5)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q_n - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \tag{6}$$

□

Costanti di Lebesgue

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

Figura: Henri Lebesgue (1875-1941).

Costanti di Lebesgue

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n+1$ punti nell'intervallo $[-1,1]$ (cf. [8]):

- punti equispaziati: si dimostra che asintoticamente $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en\log(n)}$;
- punti di Chebyshev: corrispondono a $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)}$ dove $k = 1, \ldots, n+1$; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \frac{8}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

  dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [9]);

Costanti di Lebesgue

- punti di Chebyshev estesi: sono definiti da $\frac{\cos(2k-1)}{2(n+1)\cdot\cos(\frac{\pi}{2n+1})}$ dove $k = 1, \ldots, n+1$; si dimostra che asintoticamente
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$
- configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Costanti di Lebesgue

Usando Matlab, notiamo quanto siano differenti Λ_n per $n = 5, 10, \ldots, 50$.

```
>> n=(5:5:50)'; % GRADI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n)); % EQSP.
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) ); % CHEB.
>> [s t]
ans =
  2.9258e+000   3.1291e+000
  3.2720e+001   3.5150e+000
  5.9352e+002   3.7536e+000
  1.2877e+004   3.9267e+000
  3.0679e+005   4.0626e+000
  7.7425e+006   4.1746e+000
  2.0316e+008   4.2698e+000
  5.4825e+009   4.3526e+000
  1.5112e+011   4.4259e+000
  4.2351e+012   4.4915e+000
>>
```

Costanti di Lebesgue

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

1. (Non facile, e richiede qualche conto su carta). Si implementi un codice Matlab che approssimi la costante di Lebesgue di un set di punti $x_0, \ldots, x_n$ in un intervallo prefissato $[a, b]$, valutando la *funzione di Lebesgue* $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$ (dove al solito L_k è il k-simo polinomio di Lagrange) in $M = 1000$ punti test equispaziati in $[a, b]$. In seguito si valuti con tale codice la costante di Lebesgue di un set di 10 punti equispaziati in $[-1, 1]$ e in 10 punti di Chebyshev.
2. (Facile, ma un po' lungo). Sfruttando i valori citati (a meno di O grandi), si confrontino i valori delle costanti di Lebesgue per i nodi equispaziati, di Chebyshev e di Chebyshev estesi.

Bibliografia

- K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
- V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- Chebfun, http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972- chebfun
- P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.
- D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.
- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.
- S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami.
- Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni.
- Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation).