Esercizio 1

Approssimiamo la funzione

$$f(x) = 3 \cdot \exp(-ix) + 8 \cdot \exp(+7ix) + \sin(x)$$

che è ovviamente periodica, ricordando che

$$\sin(x) = \frac{(\exp(ix)) - \exp(-ix))}{2i}.$$

Risultano nulli i coefficienti di Fourier il cui indice è $j < -1$ o $j > 7$, quindi una buona scelta è $N = 16$, in quanto potenza di 2 e tutti i coefficienti interessanti hanno indice nell'intervallo $[-\lfloor N/2 \rfloor + 1, \lfloor N/2 \rfloor]$. Così salviamo in `fft_example.m`

```
N=16;
f=inline('exp(-i*x)+exp(7*i*x)+sin(x)');
Y=fft_coeffs(f,N);
x=(0:0.01:2*pi)';
fx=f(x); tx=fft_eval(Y,x);
err=norm(fx-tx,inf);
fprintf('\n \t [err, inf norm]: %2.2e \n',err)
```

Esercizio 1

Abbiamo come risultato

```
>> fft_example
err =
   7.5078e-15
>>
```

Esercizio 1

1. Cosa succede se in `fft_example.m` si usa $N = 13$ invece di $N = 16$? Darne una spiegazione, controllando i valori assunti dal vettore `Y`.
2. Modificare `fft_example.m` per studiare l'approssimazione trigonometrica complessa della funzione $f(x) = |x - \pi|$ per $N = 4, 8, 16, 32, 64$. Come decresce l'errore? Eseguire sulla stessa figura il grafico di f in $[0, 2\pi]$ come pure della sua approssimazione con polinomi trigonometrici complessi per $N = 16$.

Nota: in caso di warning, utilizzare solo la parte reale del vettore `tx`, tramite il comando `tx=real(tx);`

Esercizio 2

Usando la formula composta dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, con $n = 2, 4, 8, \ldots, 512$ suddivisioni equispaziate dell'intervallo di integrazione, calcolare

- $\int_0^{\pi} \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17}$;
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284$;
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365$;
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.

Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica e quale sia l'andamento del rapporto $E_n(f)/E_{n+1}(f)$, dove $E_n = |I(f) - I_n(f)|$ con $I(f)$ integrale esatto e $I_n(f)$ valore fornito dalla formula di quadratura.

Esercizio 3

Usando una opportuna formula gaussiana, con $n = 10, 20, 30$ punti, calcolare

- $\int_0^{\pi} \exp(x) \cdot \cos(4x) dx = \frac{\exp(\pi)-1}{17}$;
- $\int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7}$;
- $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos(x)) dx = 7.95492652101284$;
- $\int_0^{\pi/4} \exp(\cos(x)) dx = 1.93973485062365$;
- $\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}$.

Descrivere come decresce l'errore in scala semilogaritmica.

NB: Non serve vedere quale sia l'andamento del rapporto $E_n(f)/E_{n+1}(f)$, dove $E_n = |I(f) - I_n(f)|$ con $I(f)$ integrale esatto e $I_n(f)$ valore fornito dalla formula di quadratura.

Esercizio 4

- Si calcoli in Matlab la matrice di Poisson P_{20} di ordine 20 aiutandosi con

```
>> help gallery
```

  In Octave si usi la routine `makefish` scaricabile da internet.
- Sia b il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di P_{20}.
  1. Si risolva con Gauss-Seidel e Jacobi, il problema $P_{20}x = b$, con tolleranza di $10^{(-12)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$ e $b = [1, \dots, 1]$. Quante iterazioni servono?
  2. Si risolva col gradiente coniugato il problema $P_{20}x = b$, con tolleranza di $10^{(-12)}$, partendo da $x^0 = [0 \dots 0]$. Quante iterazioni servono?

Esercizio 5. Eulero esplicito

Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \tan^{-1}(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;
- l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.

Per selezionati valori di x, ad esempio $x = 10$, si osservi il rapporto per cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.

Approssimare per $\lambda = -100$ il valore assunto dalla soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \;\; x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- Si utilizzano i metodi di Eulero esplicito e Eulero implicito con passi $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.
- Al variare di h verificare quando $|1 + h\lambda| < 1$.
- Si osservi che la mancata convergenza a 0 di Eulero implicito è dovuta al metodo di Eulero esplicito come predittore (si veda il codice di Eulero esplicito). Cosa succede se invece la si risolve con il merodo di Newton?

Esercizio 8. Metodi di Adams

- Implementare i metodi di Adams-Bashforth e Moulton per $p = 3$.
- Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \; 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \tan^{-1}(x)$.

Approssimare con tali metodi la soluzione di (3) nell'intervallo $[0, 10]$, in N punti equispaziati x_n, con $N = 2, 4, 8, 16, 32$, descrivendone con un plot l'errore assoluto $\|y_n - u_n\|_\infty$ (dove $y_n = y(x_n)$ e u_n l'approssimazione fornita dal metodo numerico).

Quali valori iniziali si considerino quelli propri della soluzione esatta $Y(x) = \tan^{-1}(x)$ nei punti richiesti.

Facoltativo: Confronto di metodi.

Esercizio facoltativo Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito, implicito e quello dei trapezi, con passi h uguali rispettivamente a 0.5, 0.1, 0.01

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + (1-\lambda)\cos(t) - (1+\lambda)\sin(t), \; 0 \leq x \leq 5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Sapendo che la soluzione è $Y(x) = \sin(x) + \cos(x)$ (indipendentemente da λ), si calcoli l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta nei punti $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.