Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

17 marzo 2013

Introduzione

Si supponga che la funzione $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ sia in realtà continua in $[0, 2\pi]$ e periodica cioè $f(0) = f(2\pi)$. Dalla teoria è noto che possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \qquad (1)$$

Usualmente non si calcola tutta la sommatoria ma si considera una sua approssimazione

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx)$$

per N sufficientemente grande.

Introduzione

Osserviamo che differentemente dalla classica interpolazione polinomiale in nodi generici, l'approssimante trigonometrica è disponibile se siamo in grado di calcolare numericamente la quantità

$$\xi_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx$$

per $k = -(N-1), \ldots, (N-1)$ Per funzioni continue e periodiche, si prova che è una buona scelta utilizzare la formula dei trapezi composta.

Introduzione

Utilizzando la formula composta dei trapezi basata su N intervalli equispaziati (N è il numero di punti da calcolare!) e ricordando la periodicità abbiamo dopo qualche conto

$$\xi_k \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right) \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right).$$

Definito $\mathcal{X}_n = \frac{1}{N} f\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right)$ e posto

$$\sigma_k := \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right). \qquad (2)$$

abbiamo $\xi_k \approx \sigma_k$, cioè

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \approx \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right). \qquad (3)$$

Matlab e fft

La funzione Matlab fft mappa il generico vettore $u = (u_1, \dots, u_N)$ in un vettore $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N)$ tale che

$$\mathcal{U}_k = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right)$$

e quindi, noto N e definita f, se scriviamo

```
n=1:N;
X_n=(1/N)*f(2*pi*n/N);
Y_n=fft(X_n);
```

abbiamo che il k-simo integrale di indice (non negativo!) corrisponde al $(k+1)$-simo elemento del vettore Y_n (per $k = 0, \dots, N-1$). Risulta importante osservare che fft permette di approssimare solo gli integrali a coefficienti positivi.

Purtroppo si può mostrare che il $(k+1)$-simo elemento calcolato da FFT in realtà per problemi legati alla periodicità dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ è tale che

$$Y_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots.$$

Questo suggerisce che se sono rilevanti solo i termini di Fourier $\xi_{-(N-1)}, \ldots, \xi_{N-1}$ mentre gli altri sono di grandezza trascurabile, allora bisogna applicare l'algoritmo FFT per calcolare $\xi_0, \ldots, \xi_{2N-1}$ e ricordare che $\xi_{-(N-1)}, \ldots, \xi_{-1}$ corrispondono agli ultimi $N-1$ termini calcolati da FFT.

Matlab e `fft`

Per vedere questo, supponiamo che sia per semplicità

$$f(x) = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \xi_k \exp(ikx)$$

e calcoliamo con `fft` il vettore $Y = (Y_1, \ldots, Y_{2N})$ (attenzione, con $2N$ coefficienti!). Consideriamo inizialmente $1 \leq k \leq N$. Allora ricordando che per $j < -(N-1)$ e $j > (N-1)$ si ha $\xi_j = 0$

$$Y_{k+1} = \ldots + \xi_{k-2N} + \xi_k + \xi_{k+2N} + \ldots = \xi_k.$$

Se invece $N < k \leq 2N$ abbiamo con ragionamenti analoghi

$$Y_{k+1} = \ldots + \xi_{k-2N} + \xi_k + \xi_{k+2N} + \ldots = \xi_{k-2N}.$$

Nota sulla importanza della `fft`

Risulta importante osservare che se $N = 2^r$, allora i coefficienti di Fourier $c_0, \ldots, c_{N-1}$ possono essere calcolati con l'algoritmo noto come Fast Fourier Transform in sole $O(N \log_2 N)$ operazioni aritmetiche a differenza delle $O(N^2)$ previste da un classico algoritmo, con un notevole risparmio in termini di complessità computazionale.

La funzione `fft` implementa la Fast Fourier Transform ed è considerata una delle più rilevanti scoperte in ambito numerico per le sue molteplici applicazioni scientifiche.

Esempio

Supposto che f sia una funzione continua e periodica in $[0, 2\pi]$ e N il numero di coefficienti calcolati da `fft`, calcoliamo

$$f(x) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \quad (4)$$

La funzione Matlab

```
function Y=fft_coeffs(f,N)
n=(1:N)';
X=(1/N)*f(2*(n-1)*pi/N);
Y=fft(X);
```

calcola il vettore

$$Y_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots$$

con

$$\xi_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx.$$

Esempio

Se N è sufficientemente grande e $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ allora supponendo che circa metà di questi siano relativi a coefficienti di Fourier con indici positivi e metà a indici negativi

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} Y_{k+1} \exp(ikx) + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor+1}^{N-1} Y_{k+1} \exp(i(k-N)x). \quad (5)$$

Per valutare l'approssimazione, noti i coefficienti, useremo quindi

```
function y=fft_eval(Y,x)
% Y, x vettori colonna. Altrimenti li rendiamo tali.
if size(x,1) == 1
  x=x';
end
if size(Y,1) == 1
   Y=Y';
end
N=length(Y); M=floor(N/2); k=(M-N+1):M;
V=exp(i*x*k);
tpos=Y(1:M+1,1); tneg=Y(M+2:end,1); t=[tneg; tpos];
y=V*t;
```

Esempio

Approssimiamo la funzione

$$f(x) = 3 \cdot \exp(-ix) + 8 \cdot \exp(+7ix) + \sin(x)$$

che è ovviamente periodica, ricordando che

$$\sin(x) = \frac{(\exp(ix)) - \exp(-ix))}{2i}.$$

Risultano nulli i coefficienti di Fourier il cui indice è $j < -1$ o $j > 7$, quindi una buona scelta è $N = 16$, in quanto potenza di 2 e tutti i coefficienti interessanti hanno indice nell'intervallo $[-\lfloor N/2 \rfloor + 1, \lfloor N/2 \rfloor]$. Così salviamo in `fft_example.m`

```
N=16;
f=inline('exp(-i*x)+exp(7*i*x)+sin(x)');
Y=fft_coeffs(f,N);
x=(0:0.01:2*pi)';
fx=f(x); tx=fft_eval(Y,x);
err=norm(fx-tx,inf);
fprintf('\n \t [err, inf norm]: %2.2e \n',err)
```

Esempio

Abbiamo come risultato

```
>> fft_example
err =
   7.5078e-15
>>
```

Esercizi

1. Cosa succede se in `fft_example.m` si usa $N = 13$ invece di $N = 16$? Darne una spiegazione, controllando i valori assunti dal vettore `Y`.
2. Modificare `fft_example.m` per studiare l'approssimazione trigonometrica complessa della funzione $f(x) = |x - \pi|$ per $N = 4, 8, 16, 32, 64$. Come decresce l'errore? Eseguire sulla stessa figura il grafico di f in $[0, 2\pi]$ come pure della sua approssimazione con polinomi trigonometrici complessi per $N = 16$.

   Nota: in caso di warning, utilizzare solo la parte reale del vettore `tx`, tramite il comando `tx=real(tx);`