# Metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari: metodi di discesa

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

15 aprile 2013

# I metodi di discesa

Una classica famiglia di metodi iterativi è quella dei metodi di *discesa*. Sia $A$ una matrice simmetrica definita positiva. Si osserva che se $x^*$ è l'unica soluzione di $Ax = b$ allora è pure il minimo del funzionale

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

Un generico *metodo di discesa* consiste nel generare una successione

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

dove $p^{(k)}$ è una direzione fissata secondo qualche criterio. Lo scopo ovviamente è che

$$\phi(x^{(k+1)}) < \phi(x^{(k)}),$$

e che il punto $x^*$, in cui si ha il minimo di $\phi$, venga calcolato rapidamente.

Il gradiente coniugato è un classico esempio di metodo di discesa.

# Il metodo del gradiente coniugato (1952).

Supponiamo di dover risolvere il sistema lineare $Ax = b$. Con il termine residuo in $x^{(k)}$ si intende la quantità $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. La succ. delle iterazioni del gradiente coniugato è quella propria dei metodi di discesa,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}, \;\; \alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(p^{(k)})^T A p^{(k)}}$$

dove $p^{(0)} = r^{(0)}$ e

$$p^{(k)} = r^{(k)} + \beta_k p^{(k-1)}, \;\; \beta_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k-1)})^T r^{(k-1)}}.$$

Con questa scelta si prova che $p^{(k)}$ e $p^{(k-1)}$ sono *A-coniugati*.

$$(p^{(k)})^T A p^{(k-1)} = 0.$$

# Il metodo del gradiente coniugato: proprietà

Il metodo del gradiente coniugato ha molte proprietà particolari. Ne citiamo alcune.

- Se $A$ è una matrice simmetrica e definita positiva di ordine $n$, si può dimostrare che il metodo è convergente e fornisce in aritmetica esatta la soluzione del sistema $Ax = b$ in al massimo $n$ iterazioni.

Questo teorema tradisce un po' le attese, sia perchè in generale i calcoli non sono compiuti in aritmetica esatta, sia perchè in molti casi della modellistica matematica $n$ risulta essere molto alto.

# Il metodo del gradiente coniugato: proprietà

Si può dimostrare che se $A$ è simmetrica e definita positiva,

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

e

$$e_k = x^* - x^{(k)}$$

allora

$$\|e_k\|_A \leq \left( \frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1} \right)^{2k} \|e_0\|_A.$$

Questo risultato stabilisce che la convergenza del gradiente coniugato è lenta qualora si abbiano alti numeri di condizionamento

$$K_2(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_j |\lambda_j|}$$

(ove al solito $\{\lambda_i\}$ sono gli autovalori di $A$).

## Gradiente coniugato in Matlab

Per quanto riguarda il codice del Gradiente Coniugato, un esempio è il file cg.m tratto da Netlib:

```
function [x,error,iter,flag]=cg(A,x,b,M,max_it,tol)
flag = 0;  iter = 0;  bnrm2 = norm( b );
if  ( bnrm2 == 0.0 ), bnrm2 = 1.0; end
r = b - A*x; error = norm( r ) / bnrm2;
if ( error < tol ) return, end
for iter = 1:max_it
  z  = M \ r; rho = (r'*z);
  if ( iter > 1 )
    beta = rho / rho_1; p = z + beta*p;
  else
    p = z;
  end
  q = A*p; alpha = rho / (p'*q ); x = x + alpha * p;
  r = r - alpha*q;  error = norm( r ) / bnrm2;
  if ( error <= tol ), break, end
  rho_1 = rho;
end
if ( error > tol ) flag = 1; end
```

# Esercizio in Matlab II

- Si calcoli la matrice di Poisson $P_{20}$ di ordine 20 aiutandosi con

```
>> help gallery
```

- Sia $b$ il vettore composto di componenti uguali a 1, avente lo stesso numero di righe di $P_{20}$. Si risolva col gradiente coniugato il problema $P_{20}x = b$, con tolleranza di $10^{(-12)}$, partendo da $x^0 = [0 \ldots 0]$. Quante iterazioni servono? E migliore questo risultato di quello ottenuto con Jacobi e Gauss-Seidel?