Equazioni differenziali ordinarie.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

13 maggio 2014

Problema di Cauchy

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \;\; x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove f è a valori in $\mathbb{R}^n$ e definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

con $(x_0, y_0) \in \Omega$. Di seguito supporremo che tale problema abbia una sola soluzione.

Esempi

Esempio 1.

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), \ \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

la cui soluzione è $\exp(x)$. E' un problema di Cauchy con $f(x, y(x)) = y(x)$.

Esempio 2.

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x), \ \ x \geq 0 \\ y_2'(x) = y_1(x), \ \ x \geq 0 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

la cui soluzione è $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (\cos(x), \sin(x))$. E' un problema di Cauchy con $y = (y_1, y_2)$, $x_0 = 0$, $y(x_0) = (1, 0)$ e

$$f(x, y(x)) = f(x, y_1(x), y_2(x)) = (-y_2(x), y_1(x)).$$

Teorema di Cauchy in piccolo

Sia $\overline{B}_\epsilon(y_0)$ la palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ di centro y_0 e raggio ϵ e sia

$$\mathcal{S}_{\delta,\epsilon,x_0,y_0} \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \overline{B}_\epsilon(y_0) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \delta, \epsilon > 0.$$

Ricordiamo che la funzione f è L-lipschitziana rispetto la seconda variabile in $\mathcal{S}_{\delta,\epsilon,x_0,y_0}$ se $L > 0$ e

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \; \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \, \forall z_1, z_2 \in \overline{B}_\epsilon(y_0).$$

Vale il seguente teorema di esistenza ed unicità (in piccolo)

Teorema

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenente (x_0, y_0), $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua e L-lipschitziana (rispetto alla seconda variabile) in $\mathcal{S}_{\delta,\epsilon,x_0,y_0}$ (per qualche δ, $\epsilon > 0$).

Allora esiste un intervallo aperto contenente x_0 nel quale è definita <u>una e una sola</u> soluzione del problema di Cauchy (1).

Teorema di Cauchy in grande

Accanto a tale teorema esiste quello di esistenza ed unicità (in grande)

Teorema

Siano $\Omega = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *continua e L-lipschitziana (rispetto la seconda variabile) in* Ω.

Allora il problema di Cauchy (1) ha una e una sola soluzione in $[x_0, x_0 + a]$.

Si noti che

- Nel teorema di Cauchy in piccolo Ω è aperto, mentre in quello in grande è chiuso.
- Il teorema di Cauchy in piccolo fornisce l'esistenza e unicità locale della soluzione, mentre quello in grande è globale.

Metodo di Eulero esplicito

Indichiamo con $\mathcal{I}(x, \overline{x})$ il più piccolo intv. aperto contenente x e $\overline{x}$ (cioè $(x, \overline{x})$ oppure $(\overline{x}, x)$). Assumendo che la soluzione sia sufficientemente regolare, abbiamo dalla formula di Taylor per $x \approx \overline{x}$, $\xi \in \mathcal{I}(x, \overline{x})$ e (1)

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y(\overline{x}) + y'(\overline{x})(x - \overline{x}) + \frac{y''(\xi)(x - \overline{x})^2}{2} \\
&\approx y(\overline{x}) + y'(\overline{x})(x - \overline{x}) = y(\overline{x}) + f(\overline{x}, y(\overline{x}))(x - \overline{x}) \quad (4)
\end{aligned}
$$

Di conseguenza se si desidera calcolare la soluzione nei punti $x_{k+1} = x_0 + kh = x_k + h$ con $k > 0$, ponendo $x = x_{k+1}$, $\overline{x} = x_k$

$$
y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k)). \quad (5)
$$

Metodo di Eulero esplicito

Il metodo di Eulero esplicito consiste nell'approssimare $y(x_{k+1})$ con y_{k+1} definito da

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k),\ \ y_0 = y(x_0). \tag{6}$$

Essendo

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$

si osserva immediatamente che applicando il metodo di Eulero esplicito ponendo $y_k = y(x_k)$, si ha per qualche ξ in (x_k, x_{k+1}), in virtù del fatto che $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) - y_{k+1} &= y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &+ \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2} - (y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k)) \\ &= \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Metodo di Eulero implicito

Similmente al caso di Eulero esplicito, se poniamo invece $x = x_k$, $\overline{x} = x_{k+1}$ abbiamo

$$y(x_k) \approx y(x_{k+1}) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))(x_k - x_{k+1}), \tag{8}$$

e quindi

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \cdot f(x_{k+1}, y(x_{k+1})). \tag{9}$$

Il metodo di Eulero implicito consiste nell'approssimare $y(x_{k+1})$ con y_{k+1} definito da

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1}),\ y_0 = y(x_0). \tag{10}$$

Evidentemente ad ogni iterazione si richiede di risolvere un'eqz. nonlineare nella variabile z del tipo

$$z = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, z)$$

la cui soluzione può essere calcolata utilizzando ad esempio col metodo di Newton o del punto fisso o delle secanti.

Osservazione

Il problema di Cauchy è definito da

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \; x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{11}$$

dove f è a valori in $\mathbb{R}^n$ e definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $(x_0, y_0) \in \Omega$. Quindi a priori i metodi di Eulero esplicito

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \; y_0 = y(x_0) \tag{12}$$

e Eulero implicito

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1}), \; y_0 = y(x_0) \tag{13}$$

possono essere utilizzati per sistemi di equazioni differenziali, in quanto la sequenza è ben definita.

Analisi convergenza

Supponiamo di analizzare il problema di Cauchy nell'intervallo compatto $I = [x_0, x_{\text{fin}}]$. Sia y la soluzione esatta di un fissato problema di Cauchy (1) e $u^{(h)}$ l'approssimazione fornita da un metodo numerico, campionando la soluzione nei punti $x_s = x_0 + sh$, con $Nh = x_{fin} - x_0$.

Un tale metodo si dice convergente se

$$\forall n,\ \|y - u^{(h)}\|_\infty \leq C(h)$$

con $C(h)$ infinitesimo rispetto ad h quando h tende a 0. Se

$$C(h) = O(h^p)$$

per qualche $p > 0$ allora si dice che il metodo converge con ordine p.

Analisi convergenza

Se un metodo per la soluzione di problemi di Cauchy ha la forma

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

allora, posto $y_n = y(t_n)$ il valore della sol. del problema di Cauchy in t_n (cf. [1, p.112]), si definisce

$$\tau_n(h) = \frac{1}{h} \cdot (y_{n+1} - (\sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(x_{n-j}, y_{n-j}))).$$

si chiama errore locale di troncamento del metodo, mentre

$$\tau(h) = \max_{n=0,\ldots} |\tau_n(h)|$$

si chiama errore globale di troncamento del metodo. Un metodo per cui $\tau(h)$ tende a 0, quando $h \to 0$ si dice **consistente**.

Nota.

Osserviamo che il metodo di Eulero esplicito

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

e Eulero implicito

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

hanno la forma

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

ponendo rispettivamente

$$p = 0,\ a_0 = 1,\ b_{-1} = 0,\ b_0 = 1$$

e

$$p = 0,\ a_0 = 1,\ b_{-1} = 1,\ b_0 = 0.$$

Consideriamo il metodo di Eulero esplicito, con ascisse equispaziate per un prefissato passo h. Sia $y_n = y(x_n)$, con y sol. del problema di Cauchy, $x_n = x_0 + nh$ e

$$u_n^* = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1}).$$

e osserviamo che

$$e_n = y_n - u_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n) \tag{14}$$

Il metodo converge se entrambi i termini a secondo membro di (14) convergono a 0 per $h \to 0$. Osserviamo che

- la prima sequenza u_n^* parte dal valore assunto dalla soluzione in x_{n-1},
- la seconda seq. u_n parte da valori che a priori non coincidono con $y_{n-1} = y(x_{n-1})$.

Analisi convergenza

Se la derivata seconda di y esiste ed è continua allora abbiamo mostrato che per quanto concerne la sequenza di Eulero esplicito,

$$|y_n - u_n^*| = |y_n - (y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}))| = (h^2/2) \cdot |y''(\xi_n)|$$

per qualche $\xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$.
Osserviamo che in questo caso, poichè

$$u_n^* = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

abbiamo che

$$|\tau_n(h)| = (1/h) \cdot |y_n - u_n^*|$$

Analisi convergenza

Se la derivata seconda di y esiste ed è continua, posto $M = \max_{x \in I} |y''(x)|$, per il metodo di Eulero esplicito,

$$|\tau_n(h)| = |y_n - u_n^*|/h = (1/h) \cdot (h^2/2) \cdot |y''(\xi_n)| = (h/2) \cdot |y''(\xi_n)| \leq Mh/2.$$

e quindi

$$\tau(h) = \max_{n=0,\ldots} |\tau_n(h)| \leq Mh/2.$$

Quindi sotto queste ipotesi il metodo di Eulero esplicito risulta consistente.

Osserviamo ora che essendo

$$e_n = y_n - u_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n) \tag{15}$$

abbiamo

$$|e_n| = |y_n - u_n| \leq |y_n - u_n^*| + |u_n^* - u_n| \leq h|\tau(h)| + |u_n^* - u_n| \tag{16}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Consideriamo ora il termine $u_n^* - u_n$.

Se f è L-Lipschitziana (rispetto al secondo argomento) allora

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

e si mostra che

$$|u_n^* - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|.$$

Infatti da

$$u_n^* = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1})$$

ricaviamo dalla L-lipschitzianità

$$\begin{aligned}
|u_n^* - u_n| &= |(y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})) - (u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1}))| \\
&= |(y_{n-1} - u_{n-1}) + h \cdot (f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-1}, u_{n-1}))| \\
&\leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + h|f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-1}, u_{n-1}))| \\
&\leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + hL|y_{n-1} - u_{n-1}| = (1 + hL)|y_{n-1} - u_{n-1}|
\end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Da $e_n := y_n - u_n$, $|y_n - u_n^*| \leq h|\tau(h)|$, $|u_n^* - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|$

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-1}| \\ &\leq h|\tau(h)| + (1 + hL)(h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-2}|) \\ &= (1 + (1 + hL))h|\tau(h)| + (1 + hL)^2|e_{n-2}| \end{aligned}$$

Di conseguenza, ragionando induttivamente abbiamo da $1 + s + \ldots + s^k = (1 - s^{k+1})/(1 - s)$ ed essendo $|e_0| = 0$,

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq (1 + (1 + hL) + \ldots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0| \\ &\leq \frac{1 - (1 + hL)^n}{1 - (1 + hL)} h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0| = \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}|\tau(h)| \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Notiamo che per $\gamma > 0$

$$\exp(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^{1} \frac{\gamma^k}{k!} = 1 + \gamma \qquad (17)$$

e quindi $(1+\gamma)^n \leq (\exp(\gamma))^n = \exp(n\gamma)$ implica che per $\gamma = hL$ si ha essendo $nh = x_n - x_0$

$$(1 + hL)^n \leq \exp(nhL) = \exp(L(x_n - x_0)).$$

Così da

$$|e_n| \leq \frac{(1+hL)^n - 1}{L} |\tau(h)|$$

si ottiene che essendo $x_0 < x_n \leq x_{fin}$

$$|e_n| \leq \frac{\exp(L(x_n - x_0)) - 1}{L} \tau(h) \leq \frac{\exp(L(x_{fin} - x_0)) - 1}{L} \cdot \frac{Mh}{2}$$

e di conseguenza, da (14), possiamo dire che il metodo di Eulero esplicito converge con ordine 1.

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Se invece di essere L-lipschitziana, f è L-dissipativa, cioè

$$-L \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq 0,$$

abbiamo da

$$u_n^* = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1})$$

$$f(x_{n-1}, u_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(u_{n-1} - y_{n-1})$$

che per qualche $\xi \in \mathcal{I}(u_{n-1}, y_{n-1})$

$$\begin{aligned} u_n - u_n^* &= (u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1})) - (y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})) \\ &= (u_{n-1} - y_{n-1}) + h \cdot (f(x_{n-1}, u_{n-1}) - f(x_{n-1}, y_{n-1})) \\ &= (u_{n-1} - y_{n-1}) + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(u_{n-1} - y_{n-1}) \\ &= (1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)) \cdot (u_{n-1} - y_{n-1}). \qquad (18) \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Da

$$u_n - u_n^* = (1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)) \cdot (u_{n-1} - y_{n-1}). \qquad (19)$$

abbiamo che se $0 < h \leq 2/L$ (non restrittivo per mostrare la conv. visto che si studia il comportamento per $h \to 0$) allora

$$-1 = 1 - 2L/L \leq 1 - hL \leq 1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(\xi) \leq 1$$

e quindi

$$|1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)| \leq 1$$

da cui

$$\begin{aligned} |u_n - u_n^*| &= |1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)| \cdot |u_{n-1} - y_{n-1}| \\ &\leq |u_{n-1} - y_{n-1}|. \qquad (20) \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Da $e_n := y_n - u_n$, $|y_n - u_n^*| \leq h|\tau(h)|$, $|u_n^* - u_n| \leq |e_{n-1}|$

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq h|\tau(h)| + |e_{n-1}| \\ &\leq h|\tau(h)| + (h|\tau(h)| + |e_{n-2}|) \\ &= 2h|\tau(h)| + |e_{n-2}| \end{aligned}$$

Di conseguenza, ragionando induttivamente abbiamo che essendo $|e_0| = 0$, $nh \leq Nh = x_{\mathrm{fin}} - x_0$, $|\tau(h)| \leq Mh/2$

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq nh|\tau(h)| + |e_0| \\ &\leq (x_{\mathrm{fin}} - x_0)|\tau(h)| \leq (x_{\mathrm{fin}} - x_0)Mh/2 \end{aligned}$$

e di conseguenza possiamo dire che il metodo di Eulero esplicito converge con ordine 1.

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Consideriamo il metodo di Eulero implicito

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_n, u_n),\ u_0 = y_0.$$

Per prima cosa calcoliamo l'errore globale di troncamento. Se $g \in C^2(a,b)$, per qualche $\xi \in (a,b)$ si ha

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(b) - h^2 g^{(1)}(\xi)/2$$

e quindi essendo $h = x_n - x_{n-1}$, se la soluzione è suff. regolare

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x)dx = y_{n-1} + hy'(x_n) - h^2 y''(\xi)/2 \\ &= y_{n-1} + hf(x_n, y_n) - h^2 y''(\xi)/2 \qquad (21) \end{aligned}$$

e quindi

$$\tau_n(h) = (1/h) \cdot (h^2 y''(\xi)/2) = hy''(\xi)/2.$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Ricordiamo che $y_n = y(t_n)$ è la soluzione del problema di Cauchy mentre

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_n, u_n),\ u_0 = y_0.$$

Definiamo

$$u_n^* := y_{n-1} + hf(t_n, y_n),\ u_0^* = y_0.$$

Come in precedenza

$$y_n - u_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n)$$

e quindi per la disuguaglianza triangolare

$$|y_n - u_n| \leq |y_n - u_n^*| + |u_n^* - u_n|.$$

Studiamo separatamente i termini al secondo membro.

Osserviamo che

$$|y_n - u_n^*| = |y_n - (y_{n-1} + hf(t_n, y_n))| = h|\tau_n(h)|$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Studiamo $|u_n^* - u_n|$ ricordando che

$$u_n^* := y_{n-1} + hf(t_n, y_n),\ u_0^* = y_0,$$

$$u_n := u_{n-1} + hf(t_n, u_n),\ u_0 = y_0.$$

Di conseguenza, dalla lipschitzianità (rispetto la seconda variabile)

$$\begin{aligned}
|u_n^* - u_n| &= |y_{n-1} + hf(t_n, y_n) - u_{n-1} - hf(t_n, u_n)| \\
&= |y_{n-1} - u_{n-1} + hf(t_n, y_n) - hf(t_n, u_n)| \\
&\leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + h|f(t_n, y_n) - f(t_n, u_n)| \\
&\leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + hL|y_n - u_n| \qquad (22)
\end{aligned}$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

In definitiva, essendo

$$|y_n - u_n| \leq |y_n - u_n^*| + |u_n^* - u_n|,$$
$$|y_n - u_n^*| = |y_n - (y_{n-1} + hf(t_n, y_n))| = h|\tau_n(h)|,$$
$$|u_n^* - u_n| \leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + hL|y_n - u_n|,$$

deduciamo che

$$|y_n - u_n| \leq h|\tau_n(h)| + |y_{n-1} - u_{n-1}| + hL|y_n - u_n|.$$

Visto che siamo interessati ad analizzare l'errore per $h \to 0$, non è restrittivo supporre $hL < 1$ e portando $hL|y_n - u_n|$ a primo membro e dividendo ambo i membri per $1 - hL > 0$ abbiamo, posto $e_n := y_n - u_n$,

$$\begin{aligned} |e_n| &= |y_n - u_n| \leq (1/(1 - hL))(h|\tau_n(h)| + |y_{n-1} - u_{n-1}|) \\ &= \frac{h|\tau_n(h)|}{1 - hL} + \frac{|e_{n-1}|}{1 - hL} \qquad (23) \end{aligned}$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Con ragionamenti simili a quelli utilizzati per mostrare la convergenza di Eulero esplicito, abbiamo per $s = 1/(1-hL)$, posto $\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|$

$$
\begin{aligned}
|e_n| &\leq sh|\tau_n(h)| + s|e_{n-1}| \\
&\leq sh|\tau_n(h)| + s(sh|\tau_{n-1}(h)| + s|e_{n-2}|) \\
&\leq \ldots \\
&\leq h\sum_{k=1}^{n} s^k |\tau_{n-k+1}(h)| + s^n|e_0| \\
&\leq h(\sum_{k=1}^{n} s^k)|\tau(h)| + s^n|e_0| \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Notiamo che se $hL < 1$ allora $s = 1/(1 - hL) > 1$ e che

$$\sum_{k=1}^{n} s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{s - 1} \leq \frac{s^{n+1}}{s - 1}$$

Ora

$$s - 1 = \frac{1}{1 - hL} - 1 = \frac{hL}{1 - hL} > 0 \tag{25}$$

e da $(1 + x)^k \leq \exp(kx)$ per $x > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} s^{n+1} &= (1 + (s - 1))^{n+1} \leq \exp((n + 1)(s - 1)) \\ &= \exp(\frac{hL(n + 1)}{1 - hL}) = \exp(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL}) \end{aligned} \tag{26}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} s^k \leq \frac{(1 - hL)\exp(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL})}{hL}$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Così ricapitolando

$$|e_n| \leq h(\sum_{k=1}^{n} s^k)|\tau(h)| + s^n|e_0|,$$

$$\sum_{k=1}^{n} s^k \leq \frac{(1-hL)\exp(\frac{L(x_{n+1}-x_0)}{1-hL})}{hL}$$

$$s^n \leq \exp(\frac{L(x_n - x_0)}{1-hL}),$$

implica finalmente

$$|e_n| \leq h\frac{(1-hL)\exp(\frac{L(x_{n+1}-x_0)}{1-hL})}{hL}|\tau(h)| + \exp(\frac{L(x_n - x_0)}{1-hL})|e_0|.$$

Facoltativo. Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Notiamo che $\tau_n(h) = h|y''(\xi)|/2$ e che se y'' è continua per il teorema di Weierstrass $|y''|$ ha massimo nel compatto $[x_0, x_{\text{fin}}]$, diciamo M. Di conseguenza

$$\tau(h) = \max(\tau_n(h)) \leq Mh/2.$$

Ricordando che $|e_0| = 0$, che $x_{\text{fin}} = x_0 + Nh$ abbiamo

$$\begin{aligned}
|e_n| &\leq h\frac{(1-hL)\exp(\frac{L(x_{n+1}-x_0)}{1-hL})}{hL}|\tau(h)| + \exp(\frac{L(x_n - x_0)}{1-hL})|e_0| \\
&\leq h\frac{(1-hL)\exp(\frac{L(x_{n+1}-x_0)}{1-hL})}{hL}\frac{Mh}{2} + \exp(\frac{L(x_{\text{fin}} - x_0)}{1-hL})|e_0| \\
&\leq \frac{(1-hL)\exp(\frac{L(x_N-x_0)+hL}{1-hL})}{L}\frac{Mh}{2} \qquad (27)
\end{aligned}$$

e quindi $|e_n| \to 0$ per $h \to 0$, per cui Eulero implicito converge.

Metodo di Crank-Nicolson

Supponiamo di dover risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{28}$$

Osserviamo che se $t_{n+1} = t_n + h$ allora ricordando la formula del trapezio per il calcolo di integrali

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt \\ &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \\ &\approx y(t_n) + (h/2)(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) \end{aligned}$$

Da

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + (h/2)(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) \quad (29)$$

si introduce il metodo implicito (detto di Crank-Nicolson o dei dei trapezi)

$$u_{n+1} \approx u_n + (h/2)(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \quad (30)$$

per risolvere numericamente il problema di Cauchy (28).

Si osservi che ad ogni iterazione, essendo il metodo implicito, bisogna risolvere una equazione nonlineare.

Assoluta stabilitá

Nell'ambito delle equazioni differenziali ordinarie, esistono vari criteri di stabilitá. Un classico problema è quello di vedere se un metodo è assolutamente stabile. Definito il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \; x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{31}$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Re(\lambda) < 0$, visto che l'unica soluzione è $y(x) = \exp(\lambda x)$ si cerca di definire il passo h cosicchè il metodo numerico per la soluzione del problema di Cauchy (1) abbia lo stesso comportamento asintotico di $\exp(\lambda x)$.

La regione di assoluta stabilità e' composta dagli $h\lambda$, per cui il metodo numerico con passo h è tale da avere lo stesso comportamento asintotico del problema di Cauchy (31) relativo al parametro λ (con $\Re(\lambda) < 0$).

Ricordiamo a tal proposito che dalla formula di Eulero, se $z = a + ib = \Re(z) + \Im(z)$ allora

$$\exp(z) = \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Quindi se $\Re(\lambda) < 0$, visto che $|\cos(\Im(\lambda x)) + i \sin(\Im(\lambda x))| = 1$ e $x > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} |\exp(\lambda x)| &= |\exp(\Re(\lambda x))||\cos(\Im(\lambda x)) + i \sin((\Im(\lambda x)))| \\ &= |\exp(\Re(\lambda x))| \to 0, \text{ per } x \to \infty. \end{aligned}$$

Visto il comportamento asintotico di $\exp(\lambda x)$, se $u^{(h)}(x_n)$ è l'approssimazione della soluzione in x_n fornita da un metodo numerico a passo h, si desidera sia $u^{(h)}(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Assoluta stabilitá: Eulero esplicito

Nel caso del metodo di Eulero esplicito,

$$u_n = u_{n-1} + hf(x_{n-1}, u_{n-1}) = (1 + h\lambda)u_{n-1}, \ u_0 = 1.$$

Si verifica facilmente che questa equazione alle differenze (di ordine 1) ha quale unica soluzione

$$u_n = (1 + h\lambda)^n$$

e che

$$u_n \to 0 \text{ se e solo se } |1 + h\lambda| < 1$$

il che significa che $h\lambda$ deve stare nel disco del piano complesso di centro -1 e raggio 1.

Assoluta stabilitá: Eulero esplicito

Di conseguenza, fissato λ, il metodo risulta stabile se e solo se si sceglie un passo sufficientemente piccolo, cioè minore di $1/|\lambda|$.

Un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \; x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{32}$$

si dice stiff, quando $\Re(\lambda) \ll 0$ (cioè $\Re(\lambda)$ è molto grande in valore assoluto).

In questo caso, si deve scegliere un passo h molto piccolo affinchè la soluzione di Eulero esplicito tenda a 0.

Assoluta stabilitá: Eulero implicito

Nel caso del metodo di Eulero implicito,

$$u_n = u_{n-1} + hf(x_n, u_n) = u_{n-1} + h\lambda u_n, \;\; u_0 = 1.$$

Portando a primo membro $h\lambda u_n$, dividendo i membri per $1 - h\lambda$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 - h\lambda}.$$

Si verifica che

$$u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}$$

e che

$$u_n \to 0 \text{ se e solo se } \frac{1}{|1 - h\lambda|} < 1.$$

Essendo $\Re(\lambda) < 0$, si vede facilmente che $|\frac{1}{1-h\lambda}| < 1$ per qualsiasi h. Questa proprietà suggerisce di applicare Eulero impl. invece di Eulero espl. per risolvere num. un problema di Cauchy.

La regione di ass. stabilità è tutto il semipiano negativo $\Re(h\lambda) < 0$.

Assoluta stabilitá: metodo di Crank-Nicolson

Nel caso del metodo di Crank-Nicolson, da $f(x,y) = \lambda y$

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + (h/2)(f(x_n, u_n) + f(x_{n-1}, u_{n-1})) \\ &= u_{n-1} + (h/2)\lambda(u_n + u_{n-1}),\ u_0 = 1 \end{aligned} \qquad (33)$$

Quindi,

$$(1 - \frac{h\lambda}{2})u_n = u_{n-1} + \frac{h\lambda}{2}u_n$$

cioè

$$\frac{2 - h\lambda}{2} \cdot u_n = \frac{2 + h\lambda}{2} \cdot u_{n-1}$$

e di conseguenza

$$u_n = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} u_{n-1}$$

Assoluta stabilitá: metodo di Crank-Nicolson

Da

$$u_n = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} u_{n-1}$$

si verifica facilmente che questa equazione alle differenze ha quale unica soluzione

$$u_n = \frac{(2 + h\lambda)^n}{(2 - h\lambda)^n}$$

e che

$$u_n \rightarrow 0 \text{ se e solo se } \frac{|2 + h\lambda|}{|2 - h\lambda|} < 1.$$

Da $\Re(\lambda) < 0$, $|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}| < 1$ per ogni h. Infatti, se $\lambda = a + ib$, $a < 0$

$$\frac{|2 + h\lambda|}{|2 - h\lambda|} = \frac{|2 + h(a + ib)|}{|2 - h(a + ib)|} = \frac{|(2 + ha) + ib|}{|(2 - ha) + ib|} = \frac{\sqrt{(2 + ha)^2 + b^2}}{\sqrt{(2 - ha)^2 + b^2}} < 1$$

in quanto $(2 + ha)^2 < (2 - ha)^2$, qualora $a < 0$.

La regione di ass. stabilità è tutto il semipiano negativo $\Re(h\lambda) < 0$.

Metodi linear multistep (LM)

Posto $h > 0$, $x_n = x_0 + nh$ ed $n \geq 0$, un metodo si dice linear multistep (abbr. LM), se è del tipo

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(x_{n-j}, u_{n-j}), \quad n = p, p+1, \dots \quad (34)$$

noti i valori $u_k \approx y(x_k)$ per $k < p$ e supposto $a_p, b_p \neq 0$.
Si dimostra che un metodo LM è consistente se e solo se

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1, \quad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

e inoltre che se $y \in C^{q+1}$ per qualche $q \geq 1$, il metodo ha ordine q se e solo se è consistente e

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^i a_j + i \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{i-1} b_j = 1, i = 2, \dots, q.$$

Metodi linear multistep (LM)

Nota.

Si osservi che per metodi a più passi non essendo noti valori approssimati della soluzione nei punti $x_0, \ldots, x_p$, usualmente li si fornisce utilizzando un metodo a meno passi, come ad esempio Eulero implicito.

Nota.

I metodi già proposti sono di questo tipo:

- *Eulero esplicito:* $a_0 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$;
- *Eulero implicito:* $a_0 = 1$, $b_{-1} = 1$, $b_0 = 0$;
- *Eulero esplicito:* $a_0 = 1$, $b_{-1} = 1/2$, $b_0 = 1/2$;

Applicando i teoremi precedenti si vede, come noto che

- *Eulero esplicito ha ordine di consistenza 1,*
- *Eulero implicito ha ordine di consistenza 1,*
- *il metodo dei trapezi ha ordine di consistenza uguale a 2.*

Metodi linear multistep: Adams

Da $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx$ ricaviamo che

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx.$$

Se è nota una approssimazione della soluzione nei punti $x_{n+\gamma}, \ldots, x_{n+\gamma-p}$ e se $\mathcal{P}_p(x)$ è il polinomio che interpola le coppie $(x_{n+\gamma-k}, f(x_{n+\gamma-k}, u_{n+\gamma-k}))$, si ha

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} \mathcal{P}_p(x)\,dx$$

e quindi facilmente un metodo per quadratura numerica dell'integrale.

- Se $m = 0$, $\gamma = 0$ si hanno metodi espliciti (Adams-Bashforth);
- Se $m = 0$, $\gamma = 1$ si hanno metodi impliciti (Adams-Moulton).

Esempi LM: Adams-Bashforth

- Adams-Bashforth (p=0): $u_{n+1} = u_n + hf_n$, $\tau_{n+1} = (h/2)y^{(2)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=1): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$, $\tau_{n+1} = (5h^2/12)y^{(3)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=2): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$, $\tau_{n+1} = (3h^3/8)y^{(4)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=3): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$, $\tau_{n+1} = (251h^4/720)y^{(5)}(\xi_n)$.

Nota.

Si noti che sono effettivamente metodi espliciti a $p+1$ passi.

Esempi LM: Adams-Moulton

- Adams-Moulton (p=0): $u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$, $\tau_{n+1} = (-h/2)y^{(2)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=1): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$, $\tau_{n+1} = (-h^2/12)y^{(3)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=2): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$, $\tau_{n+1} = (-h^3/24)y^{(4)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=3): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$, $\tau_{n+1} = (-19h^4/720)y^{(5)}(\xi_n)$.

Nota.

Si noti che sono effettivamente metodi impliciti a p passi.

Convergenza LM

Si supponga che i dati iniziali siano calcolati in modo che

$$\eta(h) = \max_{i=0,\ldots,p} |y(x_i) - u_i| \to 0, \;\; \text{per } h \to 0$$

e che il metodo sia consistente. Supponiamo inoltre che

$$a_j \geq 0, \;\; j = 0, \ldots, p$$

mentre il passo di discretizzazione h sia tale

$$h \leq 1/(2c), \;\; c = L \sum_{j=-1}^{p} |b_j|,$$

dove L è la costante di Lipschitz di f.

Allora il metodo LM converge ed inoltre esistono C_1, C_2 positive tali che per ogni n

$$|y(x_n) - u_n| \leq C_1 \eta(h) + C_2 \tau(h).$$

Barriere LM

Definizione

Un metodo numerico è detto A-stabile se la sua regione di stabilità assoluta contiene tutto il semipiano negativo.

Valgono le seguenti *barriere di stabilità* (Dahlquist, 1963)

Teorema

Nessun metodo LM esplicito è A-stabile.

Teorema

Nessun metodo LM implicito di ordine maggiore di 2 è A-stabile.

Predictor-corrector

In generale un metodo LM implicito ha proprietà di stabilità migliori rispetto ad un LM esplicito e questo ne suggerisce l'utilizzo.

Purtroppo ad ogni iterazione bisogna risolvere una equazione nonlineare.

Un approccio comunemente utilizzato è quello del predictor-corrector. Consiste nell'utilizzare il metodo di punto fisso con una certa scelta del punto iniziale.

Nel caso di un metodo di Adams implicito (detto corrector), si utilizza ad esempio un metodo di Adams esplicito (detto predictor).

Esempio Predictor-corrector

Consideriamo i seguenti metodi di Adams (porremo $f_i = f(x_i, u_i)$).

$$\text{Predictor: } u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

$$\text{Corrector: } u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i).$$

Posto $f_i^{(\eta)} = f(x_i, u_i^{(\eta)})$ abbiamo

$$\begin{array}{ll}
\text{P:} & u_{i+1}^{(0)} = u_i^{(1)} + \frac{h}{2}(3f_i^{(1)} - f_{i-1}^{(1)}) \\
\text{E:} & f_{i+1}^{(0)} = f(x_{i+1}, u_{i+1}^{(0)}) \\
\text{C:} & u_{i+1}^{(1)} = u_i^{(1)} + \frac{h}{2}(f_{i+1}^{(0)} + f_i^{(1)}) \\
\text{E:} & f_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}, u_{i+1}^{(1)})
\end{array}$$

Runge-Kutta

Consideriamo un metodo numerico che definisca una sequenza u_n t.c.

$$y(x_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hF(x_n, u_n; h)$$

con

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y))$$

e determiniamo i parametri γ_1, γ_2, α, β così da ottenere un metodo del second'ordine. Ricordiamo che questo significa che $\tau(h)$ sia $O(h^2)$. Per ottenere questo risultato usiamo la formula di Taylor bivariata. Denotate con f_x, f_y le derivate parziali rispetto al primo e secondo argomento di f, abbiamo

$$f(x+\alpha h, y+\beta h f(x, y)) = f(x, y)+\alpha h f_x(x, y)+\beta h f_y(x, y) f(x, y)+O(h^2)$$

Per definizione di errore locale di troncamento:

$$\tau(x,h) = (y(x+h) - u(x+h))/h$$

con $u(x+h)$ calcolata dal metodo qualora $u(x) = y(x)$. Da

$$f(x+\alpha h, y+\beta h f(x,y)) = f(x,y) + \alpha h f_x(x,y) + \beta h f_y(x,y) f(x,y) + O(h^2)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} F(x,y;h) &= \gamma_1 f(x,y) + \gamma_2 f(x+\alpha h, y+\beta h f(x,y)) \\ &= \gamma_1 f(x,y) + \gamma_2 (f(x,y) + \alpha h f_x(x,y) + \beta h f_y(x,y) f(x,y)) \\ &+ O(h^2) \end{aligned} \tag{35}$$

Facilmente, dalla formula di Taylor

$$\begin{aligned} y(x+h) &- y(x) = hy^{(1)}(x) + (h^2/2)y^{(2)}(x) + O(h^3) \\ &= hf(x,y) + (h^2/2)(f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)) \\ &+ O(h^3) \end{aligned} \quad (36)$$

Ma è pure

$$\begin{aligned} & u(x+h) - y(x) = hF(x,y;h) = h(\gamma_1 f(x,y) + \gamma_2(f(x,y) \\ + \; & \alpha h f_x(x,y) + \beta h f_y(x,y) f(x,y))) + O(h^3) \\ = \; & h(\gamma_1 + \gamma_2) f(x,y) + h^2 \gamma_2 (\alpha f_x(x,y) + \beta f_y(x,y) f(x,y))) \\ + \; & O(h^3) \end{aligned} \quad (37)$$

Quindi, per confronto tra (35), (36), (37), se $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, $\gamma_2 \alpha = 1/2$ e $\gamma_2 \beta = 1/2$ abbiamo un metodo del second'ordine.

Vediamo alcuni metodi in cui

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \;\; \gamma_2 \alpha = 1/2, \;\; \gamma_2 \beta = 1/2.$$

Metodo di Heun ($\alpha = 1/2$):

$$u_{n+1} = u_n + h(f(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f(x_n, u_n))).$$

Metodo di Eulero modificato ($\alpha = 1$):

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(x_n, u_n) + f(x + h, u_n + hf(x_n, u_n))).$$

La scelta particolare di un maggior numero di vincoli permette, con qualche fatica, di calcolare un metodo di ordine 4. Posto

$$u_{n+1} = u_n + h \cdot \frac{f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4}{6}$$

ove

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_n, u_n) \\ f_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h \cdot f_1}{2}) \\ f_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f_2) \\ f_4 &= f(t_n + h, u_n + h \cdot f_3) \end{aligned} \tag{38}$$

si ottiene un metodo del quart'ordine.

Metodi di Eulero esplicito in Matlab

Di seguito descriviamo i codici Matlab di Eulero esplicito e implicito, eseguiti da Atkinson, Han, Steward.

```
function [t,y]=eulero_esplicito(t0,y0,t_end,h,fcn)

n = fix((t_end-t0)/h)+1;
t = linspace(t0,t0+(n-1)*h,n)';
y = zeros(n,1);
y(1) = y0;
for i = 2:n
  y(i) = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i-1),y(i-1));
end
```

Metodo di Eulero implicito in Matlab

```
function [t,y]=eulero_implicito(t0,y0,t_end,h,fcn,
    tol)
n = fix((t_end-t0)/h) + 1;
t = linspace(t0,t0+(n-1)*h,n)';
y = zeros(n,1); y(1) = y0;
for i=2:n
  yt1 = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i-1),y(i-1));
  count = 0;  diff = 1;
  while diff > tol && count < 10
    yt2 = y(i-1) + h*feval(fcn,t(i),yt1);
    diff = abs(yt2-yt1); yt1 = yt2; count=count+1;
  end
  if count >= 10
   disp('Not converging after 10 steps at t = ')
   fprintf('%5.2f\n', t(i))
  end
  y(i) = yt2;
end
```

Osserviamo che

- la routine in questione risolve l'equazione del metodo di Eulero implicito

$$z = u_n + hf(x_{n+1}, z)$$

tramite l'applicazione del metodo di punto fisso.

- quale valore iniziale del metodo di punto fisso si sceglie il valore fornito da Eulero esplicito.

Esercizio 1. Eulero esplicito

Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passi h uguali rispettivamente a 0.2, 0.1, 0.05

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \tan^{-1}(x)$.

Si calcolino (o plottino in scala semi-logaritmica)

- l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta;
- l'errore relativo rispetto la soluzione esatta.

Per selezionati valori di x, ad esempio $x = 10$, si osservi il rapporto per cui l'errore decresce quando h è dimezzato.

Esercizio 2. Crank-Nicolson

Modificando opportunamente il metodo di Eulero implicito, si implementi il metodo di Crank-Nicolson.

Approssimare per $\lambda = -100$ il valore assunto dalla soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{40}$$

nel punto $x = 100$.

A tal proposito

- Si utilizzano i metodi di Eulero esplicito e Eulero implicito con passi $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.02$, $h = 0.01$, $h = 0.001$.
- Al variare di h verificare quando $|1 + h\lambda| < 1$.
- Si osservi che la mancata convergenza a 0 di Eulero implicito è dovuta al metodo di Eulero esplicito come predittore (si veda il codice di Eulero esplicito). Cosa succede se invece la si risolve con il merodo di Newton?

Esercizio 4. Metodi di Adams

- Implementare i metodi di Adams-Bashforth e Moulton per $p = 3$.
- Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2, \ 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

la cui soluzione è $Y(x) = \tan^{-1}(x)$.

Approssimare con tali metodi la soluzione di (41) nell'intervallo $[0, 10]$, in N punti equispaziati x_n, con $N = 2, 4, 8, 16, 32$, descrivendone con un plot l'errore assoluto $\|y_n - u_n\|_\infty$ (dove $y_n = y(x_n)$ e u_n l'approssimazione fornita dal metodo numerico).

Quali valori iniziali si considerino quelli propri della soluzione esatta $Y(x) = \tan^{-1}(x)$ nei punti richiesti.

Esercizio Facoltativo: Confronto di metodi.

Si risolva utilizzando il metodo di Eulero esplicito, implicito e quello dei trapezi, con passi h uguali rispettivamente a 0.5, 0.1, 0.01

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + (1-\lambda)\cos(t) - (1+\lambda)\sin(t), \; 0 \leq x \leq 5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{42}$$

Sapendo che la soluzione è $Y(x) = \sin(x) + \cos(x)$ (indipendentemente da λ), si calcoli l'errore assoluto rispetto la soluzione esatta nei punti $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.

Bibliografia

K.E. Atkinson, W. Han, D.E. Steward *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Wiley, (2009).

V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.