Equazione di Poisson.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

20 maggio 2014

Equazione di Poisson, caso univariato.

Consideriamo il problema ai valori al contorno

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \; x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $q \in C^{(0)}([a, b])$, $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$,
- $g \in C^{(0)}([a, b])$.

Per una dimostrazione di esistenza, unicità e regolarità della soluzione y, si consulti [1, p.671].

Equazione di Poisson, caso univariato.

Di seguito consideriamo quale esempio il caso particolare di (1)

$$\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

con

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $c > 0$,
- $f \in C^{(0)}([a, b])$.

Questo problema si dice di Poisson univariato.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Supponiamo che la soluzione u del problema di Poisson univariato, appartenga a $C^4([a, b])$. Allora dallo sviluppo di Taylor centrato in x, abbiamo

$$y(x+h) = y(x) + hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_1),$$

$$y(x-h) = y(x) - hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_2),$$

e quindi sommando membro a membro, dal teorema della media, per qualche $\xi \in (a, b)$,

$$y(x+h) + y(x-h) = y(x) + h^2 y^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12} y^{(4)}(\xi),$$

da cui l'appross. della derivata seconda con le differenze centrate

$$y^{(2)}(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}. \tag{3}$$

Equazione di Poisson, caso univariato.

Consideriamo ora la discretizzazione equispaziata dell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = a + ih, \ 0 \leq i \leq n + 1$$

con

$$h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Allora, il problema di Poisson univariato, può essere discretizzato utilizzando le differenze centrate, ricavando

$$-\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + cy(x) \approx -y^{(2)}(x) + cy(x) = f(x)$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b).

Equazione di Poisson, caso univariato.

Essendo, come visto,

$$-\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}+cy(x) \approx -y^{(2)}(x)+cy(x) = f(x)$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b), riscrivendo le equazioni relativamente ai punti $x = x_i$, intendiamo approssimare $y(x_k)$ con u_k risolvente per $k = 1, \ldots, n$,

$$-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}+cu_k = f(x_k), \tag{4}$$

dove $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Tali equazioni lineari possono essere riscritte come

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k+1} + 2u_k - u_{k-1} + ch^2 u_k) = f(x_k), \tag{5}$$

con $u_0 = u_{n+1} = 0$, ed essere convenientemente definite matricialmente come $Au = b$, dove A è la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2+ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2+ch^2 \end{pmatrix}$$

e $b_k = f(x_k)$ per $k = 1, \dots, n$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

La matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2+ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2+ch^2 \end{pmatrix}$$

è

- simmetrica, e definita positiva (per il primo ed il terzo teorema di Gershgorin), con lo spettro degli autovalori $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$ contenuto in $[c, c+4h^{-2}]$;
- a predominanza diagonale stretta, essendo $c > 0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Si prova che

- se y è la soluzione del problema di Poisson e $u_k \approx y(x_k)$ con $x_k = a + kh$, si ha

$$\frac{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_2}{\sqrt{n}} = O(h^2)$$

- se la soluzione $y \in C^{(4)}([a,b])$, allora

$$\max_i |y(x_i) - u_i| \leq \frac{h^2}{24} \|y^{(4)}\|_\infty \|(x-a)(b-x)\|_\infty$$

  (cf. [1, p.678]);
- essendo la matrice tridiagonale, il sistema lineare può essere risolto con il metodo di eliminazione gaussiana con complessità $O(n)$.
- se $c = 0$, si può ancora mostrare che A è def. positiva e che per ogni h che $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$ è contenuto in $[\delta, c + 4h^{-2}]$ con $\delta > 0$ indipendente da h.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Consideriamo l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) = g(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

dove

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{7}$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Definita la griglia di punti $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=0,\ldots,n+1}$

$$x_i = ih, \; y_j = jh, \; h = 1/(n+1), \; i,j = 0,\ldots,n+1$$

risulta evidente che per $i = 0$ o $j = 0$, $i = n+1$ o $j = n+1$ abbiamo un punto del bordo e quindi in virtù delle condizioni di Dirichlet in (6), il valore della soluzione u^* è determinato.

Vediamo cosa succede quando il punto della griglia $\mathcal{G}$ è interno al quadrato $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, caratterizzati dall'avere $i, j = 1, \ldots, n$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Si mostra facilmente, utilizzando la formula di Taylor bivariata, in cui vengono tralasciati termini di ordine $O(h^2)$, che si può approssimare $\Delta u(x, y)$ con

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2}$$

e quindi essendo, $x_i = ih$, $y_j = jh$, $\Delta u(x_i, y_j)$ con

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2} \tag{8}$$

da cui la discretizzazione dell'equazione di Poisson

$$u(x_{i+1}, y_j)+u(x_{i-1}, y_j)+u(x_i, y_{j+1})+u(x_i, y_{j-1})-4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \tag{9}$$

per $i, j = 1, \ldots, n$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

con le condizioni al contorno

$$
\begin{aligned}
u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \;\; i = 0, \; j = 1, \ldots, n && (10) \\
u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \;\; i = n+1, \; j = 1, \ldots, n && (11) \\
u(x_i, y_j) &= g(x_i, y_j), \;\; i = 1, \ldots, n, \; j = 0, j = n+1. && (12)
\end{aligned}
$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

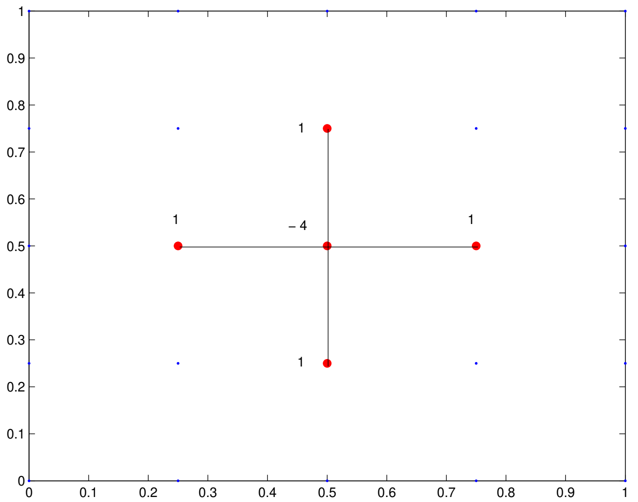

Figura: La molecola della discr. del Laplaciano avente centro $(0.5, 0.5)$ e $h = 0.25$. Si ricordi di dividere ogni valore nella molecola per h^2.

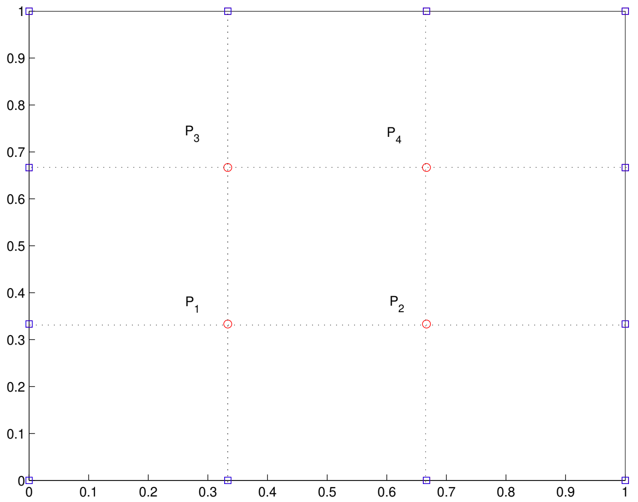

Figura: Una griglia avente passo $h = 1/3$ relativamente al quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Purtroppo, la descrizione del sistema lineare non è troppo chiara. Vediamola scritta matricialmente. Sia B la matrice $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed I la matrice identica di ordine n del tipo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Allora se b è il vettore ottenuto dai contributi dei termini dovuti a f e g in (6) e (9), definita la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \ldots \\ I & B & I & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & I & B \end{pmatrix}$$

si ricava che il sistema da risolvere è $Au = b$, usando ad esempio il metodo di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR o il gradiente coniugato.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Per una implementazione della matrice di Poisson A, utilizziamo la funzione `makefish`

```
function mat = makefish(siz);
% make a Poisson matrix

leng = siz*siz;
dia = zeros(siz,siz);
off = -eye(siz,siz);
 for i=1:siz, dia(i,i)=4; end;
 for i=1:siz-1, dia(i,i+1)=-1; dia(i+1,i)=-1; end;
mat = zeros(leng,leng);
 for ib=1:siz,
  mat(1+(ib-1)*siz:ib*siz,1+(ib-1)*siz:ib*siz) = dia; end;
 for ib=1:siz-1,
  mat(1+(ib-1)*siz:ib*siz,1+ib*siz:(ib+1)*siz) = off;
  mat(1+ib*siz:(ib+1)*siz,1+(ib-1)*siz:ib*siz) = off; end;
return;
```

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Vediamone un esempio dalla shell di Matlab/Octave:

```
>> makefish(2)
ans =
     4    -1    -1     0
    -1     4     0    -1
    -1     0     4    -1
     0    -1    -1     4
>>
```

Si vede subito dal 4 sulla diagonale che `makefish` non calcola A ma $-A$ e dovremo tener conto di questo dettaglio nell'implementazione.

Osserviamo che non è proprio facile determinare, fissato i, j, quali siano i punti adiacenti a (x_i, y_j) che essendo sul bordo hanno valore della soluzione noto a priori e quindi tali da contribuire attivamente al termine noto.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Facciamo un esempio sulla risoluzione dell'equazione di Poisson via metodo alle differenze con 5 punti.

Sia $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $h = 1/3$ e siano

$$P_{i,j} = (ih, jh), \; i, j = 0, 1, 2, 3.$$

E' chiaro che per

- per $i = 0$ i punti $P_{0,j}$ sono sull'asse $x = 0$ (cioè l'asse y),
- per $i = 3$ i punti $P_{3,j}$ sono sull'asse $x = 1$,
- per $j = 0$ i punti $P_{i,0}$ sono sull'asse $y = 0$ (cioè l'asse x)
- per $j = 3$ i punti $P_{i,3}$ sono sull'asse $y = 1$.

Date le condizioni al contorno, la soluzione in questi punti è nota ed è uguale a $u_{i,j} = g(x_i, y_j)$.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

I rimanenti punti $P_{i,j}$, con $i, j = 1, 2$ sono interni a Ω ed è

$$u(x_{i+1}, y_j)+u(x_{i-1}, y_j)+u(x_i, y_{j+1})+u(x_i, y_{j-1})-4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \tag{13}$$

Analizziamo caso per caso queste equazioni:

- Nel caso $i = 1$, $j = 1$ si ha

$$u(x_2, y_1)+u(x_0, y_1)+u(x_1, y_2)+u(x_1, y_0)-4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1),$$

$$u(x_0, y_1) = g(x_0, y_1),\ u(x_1, y_0) = g(x_1, y_0).$$

Portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_1)+u(x_1, y_2)-4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1)-g(x_0, y_1)-g(x_1, y_0).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso $i = 2$, $j = 1$ si ha

  $$u(x_3, y_1)+u(x_1, y_1)+u(x_2, y_2)+u(x_2, y_0)-4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1),$$

  $$u(x_3, y_1) = g(x_3, y_1),\ u(x_2, y_0) = g(x_2, y_0)$$

  portando questi due termini a secondo membro otteniamo

  $$u(x_1, y_1)+u(x_2, y_2)-4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_1, y_1)-g(x_3, y_1)-g(x_2, y_0).$$

- Nel caso $i = 1$, $j = 2$ si ha

  $$u(x_2, y_2)+u(x_0, y_2)+u(x_1, y_3)+u(x_1, y_1)-4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2),$$

  ed essendo

  $$u(x_0, y_2) = g(x_0, y_2),\ u(x_1, y_3) = g(x_1, y_3)$$

  portando questi due termini a secondo membro otteniamo

  $$u(x_2, y_2)+u(x_1, y_1)-4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2)-g(x_0, y_2)-g(x_1, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso $i = 2$, $j = 2$ si ha

$$u(x_3, y_2)+u(x_1, y_2)+u(x_2, y_3)+u(x_2, y_1)-4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_3, y_2) = g(x_3, y_2), \; u(x_2, y_3) = g(x_2, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_2)+u(x_2, y_1)-4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2)-g(x_3, y_2)-g(x_2, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Poniamo ora

$$b_1 := h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0),$$

$$b_2 := h^2 f(x_2, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0),$$

$$b_3 := h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3),$$

$$b_4; = h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3),$$

ordiniamo i punti da sinistra a destra, e dal basso verso l'alto (ordine lessicografico)

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_1),\ P_3 = (x_1, y_2),\ P_4 = (x_2, y_2),$$

e infine poniamo

$$u_1 = u(x_1, y_1),\ u_2 = u(x_2, y_1),\ u_3 = u(x_1, y_2),\ u_4 = u(x_2, y_2),$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

ottenendo così

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 - 4u_1 &= b_1, \\ u_1 + u_4 - 4u_2 &= b_2, \\ u_4 + u_1 - 4u_3 &= b_3, \\ u_3 + u_2 - 4u_4 &= b_4, \end{aligned}$$

da cui posto

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

basta risolvere il sistema $Au = b$ per ottenere $u(x_1, y_1)$, $u(x_2, y_1)$, $u(x_1, y_2)$, $u(x_2, y_2)$.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Notiamo che

```
>> makefish(2)
ans =
     4    -1    -1     0
    -1     4     0    -1
    -1     0     4    -1
     0    -1    -1     4
>>
```

calcola proprio $-A$, mentre il termine noto b può essere facilmente calcolato dopo aver notato che

1. i termini $-g(x_i, y_0)$ sono presenti nelle componenti b_i;
2. posto $n = 1/h$, per $i = 1, \ldots, n-1$, i termini $-g(x_i, y_n)$ sono presenti nelle componenti $b_{(n-1)^2-(n-1)+i}$;
3. per $j = 1, \ldots, n-1$, i termini $-g(x_0, y_j)$ sono presenti nelle componenti b_s con $s \equiv 1 \mod n-1$;
4. per $j = 1, \ldots, n-1$, i termini $-g(x_n, y_j)$ sono presenti nelle componenti b_s con $s \equiv 0 \mod n-1$.

Equazione di Poisson: una implementazione.

Vediamo ora un'implementazione del metodo sopra descritto, detto per ovvi motivi *a 5 punti* (cf. (9)).
Risulta importante ricordare la seguente stima dell'errore
Teorema. Se u è soluzione dell'equazione di Poisson (6) ed è

almeno 4 volte differenziabile con continuità nel quadrato $\Omega := [0,1] \times [0,1]$ ed u_h l'approssimazione ottenuta col metodo alle differenze con 5 punti, utilizzando una griglia $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}$ con $x_i = i\,h$, $y_j = j\,h$, $h = 1/(n+1)$ allora

$$|u(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j)| \leq ch^2$$

con

$$c = (1/24) \left(\max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right| + \max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| \right)$$

Ci si aspetta quindi dai test numerici che effettueremo un errore dell'ordine di h^2.

Equazione di Poisson: una implementazione.

Salviamo in `poisson5pts.m` la funzione

```
function u=poisson5pts(n,f,g_left,g_right,g_down,g_up)

A=-makefish(n);
h=1/(n+1);
x=(h:h:1-h)'; y=x;

% SOLUZIONI IN BASSO.
x_loc=x;
y_loc=zeros(size(x_loc));
b_down=feval(g_down,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI IN ALTO.
y_loc=ones(size(x_loc));
b_up=feval(g_up,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI A SINISTRA.
y_loc=x_loc; x_loc=zeros(size(x_loc));
b_left=feval(g_left,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI A DESTRA
x_loc=ones(size(x_loc));
b_right=feval(g_right,x_loc,y_loc);
```

Equazione di Poisson: una implementazione.

```
% COMPOSIZIONE TERMINE NOTO.
b1=b_down;
% PRIMA RIGA IN BASSO.
b1(1)=b1(1)+b_left(1); b1(n)=b1(n)+b_right(1);
% PRIMA RIGA IN ALTO.
bn=b_up; bn(1)=bn(1)+b_left(n); bn(n)=bn(n)+b_right(n);
% RIGHE INTERMEDIE.
bj=[];
for j=2:(n-1)
    bjloc=zeros(n,1);
    bjloc(1)=bjloc(1)+b_left(j);
    bjloc(n)=bjloc(n)+b_right(j);
    bj=[bj; bjloc];
end
b=[b1; bj; bn];
% GRIGLIA LESSICOGRAFICA (METODO STANDARD).
lunghezza_x=length(x); X=[]; Y=[];
for index=1:lunghezza_x
    X=[X; x];
    Y=[Y; y(index)*ones(size(x))];
end
fXY=feval(f,X,Y);
b_f=(h^2)*fXY; b=b_f-b; u=A\b;
```

Equazione di Poisson: una implementazione.

Salviamo in `demopoisson5pts.m` la demo

```
% MODIFIED VERSION: MARCH 13, 2008.

demo_example =2;

switch demo_example
case 1
    f=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_down=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_up=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_left=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_right=inline('ones(size(x))','x','y');
    solution=inline('ones(size(x))','x','y');
case 2
    f=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_down=inline('exp(pi*x)','x','y');
    g_up=inline('-exp(pi*x)','x','y');
    g_left=inline('cos(pi*y)','x','y');
    g_right=inline('((exp(1))^pi)*cos(pi*y)','x','y');
    solution=inline('(exp(pi*x)).*cos(pi*y)','x','y');
```

Equazione di Poisson: una implementazione.

Salviamo in `demopoisson5pts.m` la demo

```
case 3
    f=inline('(-2*(pi^2))*sin(pi*x).*sin(pi*y)','x','y');
    g_down=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_up=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_left=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_right=inline('zeros(size(x))','x','y');
    solution=inline('(sin(pi*x)).*sin(pi*y)','x','y');

otherwise
    f=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_down=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_up=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_left=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_right=inline('zeros(size(x))','x','y');
    solution=inline('(sin(pi*x)).*sin(pi*y)','x','y');
end
```

Equazione di Poisson: una implementazione.

```
for index=2:5
    n=2^index; h=1/(n+1); x=(h:h:1-h)'; y=x;
    [X,Y]=meshgrid(x,y); X=X'; Y=Y';
    % VETT. SOL, NEI PUNTI DELLA GRIGLIA ORD. IN LESSICOGR..
    u=poisson5pts(n,f,g_left,g_right,g_down,g_up);
    % USO RESHAPE COSI' LA SOLUZIONE HA LE STESSE DIMENSIONI DELLE MATRICI X, Y.
    Z=(reshape(u,n,n));

    if demo_example <=3
        V=feval(solution,X,Y);
        err(index)=norm(V(:)-Z(:),inf);
        if index == 1
          fprintf('\n \t [n]: %4.0f [ERR]: %2.2e',n,err(index));
        else
         fprintf('\n \t [n]: %4.0f [ERR]: %2.2e [RATIO]: %2.2f',...
               n,err(index),err(index-1)/err(index));
        end
    end
end
surf(X,Y,Z);
```

Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

Alcune osservazioni sui codici Matlab/Octave appena esposti.

- Posto $h = \frac{1}{n+1}$, allora la matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mentre il termine noto b e il vettore soluzione u apparterranno a $\mathbb{R}^{n^2}$. dobbiamo risolvere un sistema lineare $Au = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots & 0 \\ I & B & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B & I \end{pmatrix}$$

e b un vettore i cui contributi dipendono dai valori che hanno sul bordo le funzioni f e g che definiscono l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

- Dobbiamo tener conto che `makefish` non calcola A ma $\bar{A} = -A$ ed è per questo che scriviamo `A=-makefish(n)`.
- (**Per i più esperti**) La funzione `meshgrid` crea a partire da due vettori di numeri reali x, y, le ascisse X e le ordinate Y dei punti facenti parte della griglia *generata* da x ed y. In particolare la matrice di punti

$$\begin{pmatrix} (x_1, y_1) & (x_2, y_1) & \dots & (x_n, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_1, y_n) & (x_2, y_n) & \dots & (x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

viene descritta tramite la griglia di ascisse e ordinate e cioè come

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

e

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \dots & y_1 \\ y_2 & y_2 & \dots & y_2 \\ y_3 & y_3 & \dots & y_3 \end{pmatrix}$$

Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

Così ad esempio

```
>> h=1/3;
>> x=h:h:1-h;
>> x
x =
     0.3333    0.6667
>> y=x;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y)
X =
     0.3333    0.6667
     0.3333    0.6667
Y =
     0.3333    0.3333
     0.6667    0.6667
>>
```

descrivendone le coordinate x, y.

Equazione di Poisson: esempio 1.

Consideriamo l'equazione di Poisson nel quadrato unitario $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 1, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

la cui soluzione è $u(x,y) = 1$.
Non è difficile osservare che

$$\max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right| = 0, \ \max_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| = 0$$

e quindi ci si aspetta che per qualsiasi h si abbia un errore dell'ordine della precisione di macchina.

Equazione di Poisson: esempio 1.

Lanciamo da shell il primo esempio della demo, ottenendo

```
>> demopoisson5pts
   [n]:    4 [ERR]: 4.44e-016 [RATIO]: 163181252362740.50
   [n]:    8 [ERR]: 1.11e-015 [RATIO]: 0.40
   [n]:   16 [ERR]: 1.55e-015 [RATIO]: 0.71
   [n]:   32 [ERR]: 6.66e-015 [RATIO]: 0.23
>>
```

Per *ratio* si intende il rapporto dell'errore tra due iterate successive.

Equazione di Poisson: esempio 2.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\
u(x, 0) = \exp(\pi\, x), \quad x \in [0, 1] \\
u(x, 1) = -\exp(\pi\, x), \quad x \in [0, 1] \\
u(0, y) = \cos(\pi\, y), \quad y \in [0, 1] \\
u(1, y) = \exp(\pi) \cdot \cos(\pi\, y), \quad y \in [0, 1]
\end{cases}
\tag{16}
$$

la cui soluzione è $u(x, y) = \exp(\pi\, x) \cdot \cos(\pi\, y)$.

Equazione di Poisson: esempio 2.

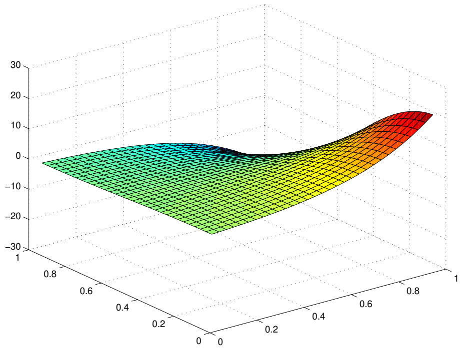

Figura: Soluzione del problema 2.

Equazione di Poisson: esempio 2.

Si nota subito che per $x, y \in [0, 1]$ si ha

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y)\right| = \pi^4 \left|\exp(\pi\, x) \cdot \cos(\pi\, y)\right| \leq \pi^4 \exp(\pi) \approx 2254.1$$

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y)\right| = \pi^4 \left|\exp(\pi\, x) \cdot \cos(\pi\, y)\right| \leq \pi^4 \exp(\pi) \approx 2254.1$$

da cui

$$c \leq (1/24) \cdot 2254.1 \cdot 2 \approx 187.8428.$$

Quindi quale maggiorazione dell'errore assoluto in norma infinito, per $n = 3, 7, 15, 31$, avremo i valori immagazzinati qui sotto nel vettore `err`

Equazione di Poisson: esempio 2.

```
>> format short e
>> c=187.8428; err=[];
>> for n=2:5, N=2^n-1; h=1/(N+1); h2=h^2; err=[err; c*h2]; end
>> err
err =
   1.1740e+001
   2.9350e+000
   7.3376e-001
   1.8344e-001
>>
```

Lanciando la demo `demopoisson5pts`, per `demoexample=2`, abbiamo

```
>> demopoisson5pts
    [n]:     4 [ERR]: 9.75e-002 [RATIO]: 0.74
    [n]:     8 [ERR]: 3.20e-002 [RATIO]: 3.04
    [n]:    16 [ERR]: 9.05e-003 [RATIO]: 3.54
    [n]:    32 [ERR]: 2.45e-003 [RATIO]: 3.69
>>
```

Equazione di Poisson: esempio 2.

1. Come ci si aspettava la maggiorazione è realizzata, ma purtroppo come stima è abbastanza conservativa.
2. Nella colonna `[RATIO]` abbiamo indicato il rapporto e_{2h}/e_h dove e_h è l'errore assoluto compiuto dal metodo a 5 punti con passo h (ovvero la quantità esposte nella colonna `[ERR]` nella stessa riga di h). Il fatto che la *ratio* sia 4 non è sorprendente. Infatti se l'errore decresce come h^2 si può supporre che sia $e_h \approx \hat{c}h^2$ per qualche $\hat{c}$ indipendente da h e quindi

$$\frac{e_{2h}}{e_h} \approx \frac{\hat{c}(2h)^2}{\hat{c}h^2} \approx 4.$$

Equazione di Poisson: esempio 3.

Consideriamo un la risoluzione dell'equazione di Poisson nel quadrato unitario $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con un metodo alle differenze.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-2\,\pi^2)\,\sin(\pi\,x)\,\sin(\pi\,y), \;\; (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = 0, \;\; x \in [0,1] \\ u(x,1) = 0, \;\; x \in [0,1] \\ u(0,y) = 0, \;\; y \in [0,1] \\ u(1,y) = 0, \;\; y \in [0,1] \end{array} \right. \tag{17}$$

Equazione di Poisson: esempio 3.

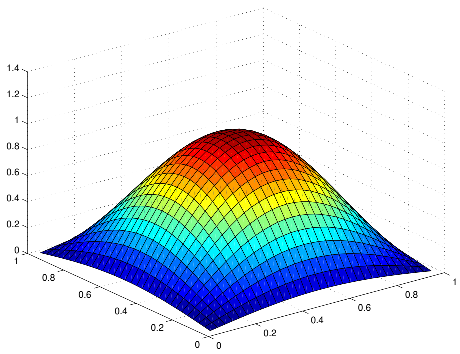

Figura: Soluzione del problema 3.

Equazione di Poisson: esempio 3.

la cui soluzione è $u(x, y) = \sin(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y)$. Ripetendo la stima basata sulle derivate quarte della soluzione u abbiamo facilmente

$$c \leq (1/24)\, 2\, \pi^4 \approx 8.1174$$

da cui

```
>> c=8.1174;
>> err=[]; for n=2:5, N=2^n; N=N-1; h=1/(N+1); h2=h^2; err=[err; c*h2]; end
>> format short e
>> err
err =
   5.0734e-001
   1.2683e-001
   3.1709e-002
   7.9271e-003
>>
```

Equazione di Poisson: esempio 3.

Lanciando la demo `demopoisson5pts`, per `demoexample=3`, abbiamo

```
>> demopoisson5pts
   [n]:    4 [ERR]: 3.04e-002 [RATIO]: 2.39
   [n]:    8 [ERR]: 9.91e-003 [RATIO]: 3.06
   [n]:   16 [ERR]: 2.83e-003 [RATIO]: 3.51
   [n]:   32 [ERR]: 7.54e-004 [RATIO]: 3.75
>>
```

Rispetto al caso precedente la stima è più precisa, e la ratio di circa 4 ci dice che la convergenza è ancora dell'ordine di h^2.

Risolvere l'equazione di Poisson nel quadrato unitario $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con un metodo alle differenze. Quali passi scegliere $h = 1/4$, $h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$. Qual'è la soluzione esatta? Con quale fattore decrescono gli errori?

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \ \ (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = (x-1)x, \ \ x \in [0,1] \\ u(x,1) = (x-1)x, \ \ x \in [0,1] \\ u(0,y) = (y-1)y, \ \ y \in [0,1] \\ u(1,y) = (y-1)y, \ \ y \in [0,1] \end{cases} \tag{18}$$

Bibliografia

V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.