

# INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELL'APPROSSIMAZIONE \*

A. SOMMARIVA

**1. Introduzione.** Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado  $n$ , aventi come noto dimensione  $N_n = n + 1$ .

Risulta evidente che se  $S_n \equiv \mathbb{P}_n$  si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

Inoltre se  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è lo spazio normato delle continue  $C([a, b])$  in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

si ha che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subseteq (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

**DEFINIZIONE 1.1.** *Un insieme  $S$  si dice denso in uno spazio normato  $X$  se per ogni  $x \in X$ , fissato  $\epsilon > 0$ , esiste  $s \in S$  tale che  $\|x - s\| < \epsilon$ .*

Equivalentemente,

**DEFINIZIONE 1.2.** *Un insieme  $S$  si dice denso in uno spazio normato  $X$ , se per ogni  $x \in X$  esiste una successione  $\{s_n\}$  di elementi di  $S$  tale che  $s_n \rightarrow x$ .*

**TEOREMA 1.1.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio funzionale normato e*

$$\emptyset \neq S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

*una successione crescente di sottoinsiemi di  $X$ . Allora*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

*se e solo se  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .*

**LEMMA 1.1** (Teorema dell'estremo inferiore). *Un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore.*

**NOTA. 1.1.** *Osserviamo che essendo  $S_n \neq \emptyset$ , necessariamente esiste  $p_n^* \in S_n$  e quindi se  $M = \|p_n^* - f\|$  ed esiste  $E_n(f) = \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|$  allora  $0 \leq E_n(f) \leq M$ .*

*Ma essendo  $0 \leq E_n(f)$ , per il teorema dell'estremo inferiore, necessariamente esiste*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|.$$

**DIMOSTRAZIONE. 1.1.**

$\Rightarrow$  *Supponiamo sia  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$  per ogni  $f \in X$ . Sia  $f \in X$  e sia fissato un arbitrario  $\epsilon > 0$ .*

*Allora*

---

\*Ultima revisione: 15 marzo 2016

- per un qualche  $n$  si ha  $E_n(f) < \epsilon/2$ ,
- dalle proprietà dell'estremo inferiore, da  $E_n(f) < \epsilon/2$ , si ha pure che per  $\delta > 0$  esiste  $p_n \in S_n$  tale che  $\|p_n - f\| < \epsilon + \delta$ . In particolare per  $\delta = \epsilon/2$  deduciamo che esiste  $p_n \in S_n$  tale che  $\|p_n - f\| < \epsilon$ .

Di conseguenza per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un certo  $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|p - f\| < \epsilon$ , cioè  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .

$\Leftarrow$  Viceversa sia  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  denso in  $X$  ed  $f \in X$ .

Essendo

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

la successione  $\{E_n(f)\}_n$  è decrescente e quindi ammette limite.

Essendo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  denso in  $X$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|f - p\| \leq \epsilon$ . Se  $p \in S_{n^*}$  allora  $E_{n^*}(f) \leq \epsilon$ .

Quindi per  $\epsilon > 0$  arbitrario, essendo la successione  $\{E_n(f)\}_n$  decrescente si ha  $\lim_n E_n(f) \leq \epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$  cioè

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0.$$

△

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densità.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [6, p.107].

**TEOREMA 1.2** (Weierstrass, 1885, (ma anche Runge 1885)). *Ogni funzione continua in  $[a, b]$  è limite uniforme di una successione di polinomi.*

Tale Teorema è equivalente a dire che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n$  è denso in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  e quindi dal Teorema 1.1 deduciamo che se  $f \in C([a, b])$  allora  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ .

Miriamo a mostrare l'esistenza di un elemento di miglior appross., sotto particolari condizioni. Osserviamo che (cf. [7, p.151])

**TEOREMA 1.3** (Weierstrass (1860) (ma anche Bolzano (1830))). *Una funzione continua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono  $x_{min}$  ed  $x_{max}$  tali che*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

per ogni  $x \in S$ .

**NOTA. 1.2.** *Il teorema fu scoperto da Bolzano e in seguito riscoperto da Weierstrass. Non lo si confonda con il teorema di Bolzano-Weierstrass.*

**TEOREMA 1.4** (Bolzano-Weierstrass). *In uno spazio euclideo finito dimensionale, ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.*

Inoltre (cf. [7, p.150])

**LEMMA 1.2.** *In uno spazio normato  $X$  di dimensione finita, un suo sottinsieme  $S$  è compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Ricordiamo che

DEFINIZIONE 1.3. Un sottoinsieme  $S$  di uno spazio metrico  $X$  si dice compatto se e solo se ogni successione di punti possiede una sottosuccessione che converge ad un punto di  $S$ .

LEMMA 1.3. Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $f \in X$ . Sia  $S \subset X$  aperto e  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ . La funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in ogni punto di  $S$ .

DIMOSTRAZIONE. 1.2. Osserviamo che se  $x, y \in X$  allora

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Infatti, siano  $x, y \in X$ , e vista la loro arbitrarietà non è restrittivo supporre  $\|x\| \geq \|y\|$ . Dalla disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \Leftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Intendiamo mostrare che la funzione  $d(f, \cdot)$  è continua nell'aperto  $S$  cioè

- per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta(\epsilon) > 0$ , tale che se  $\|x - y\| \leq \delta(\epsilon)$ ,  $x, y \in S$ , allora  $\|d(f, x) - d(f, y)\| \leq \epsilon$ .

Fissato  $\epsilon > 0$ ,  $x \in S$ , sia  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ . Allora se  $y \in S$ ,  $\|x - y\| \leq \epsilon$ , visto che  $\|x_1\| - \|x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$  pure per  $x_1 = f - x$ ,  $x_2 = f - y$ ,

$$\begin{aligned} |d(f, x) - d(f, y)| &= |\|f - x\| - \|f - y\|| \\ &\leq \|(f - x) - (f - y)\| = \|x - y\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

e quindi la funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in  $x \in S$ .  $\triangle$

Il lemma precedente serve a mostrare la seguente proposizione.

TEOREMA 1.5. Sia  $S$  un sottospazio vettoriale di uno spazio normato  $X$ . Si supponga che

- $S$  sia di dimensione finita,
- $f$  sia un certo elemento di  $X$ .

Allora esiste  $s^* \in S$ , detto di miglior approssimazione di  $f$  in  $S$ , tale che

$$\|f - s^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

DIMOSTRAZIONE.

- L'elemento 0 dello spazio normato  $X$  appartiene certamente in ogni suo sottospazio, e quindi pure in  $S$ . Così sicuramente

$$E(f) \equiv \inf_{p \in S} \|p - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|.$$

- La funzione  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$  è continua in  $S$ .
- Essendo lo spazio  $S$  di dimensione finita, la palla  $B_S(f, \|f\|) = \{p \in S : \|p - f\| \leq \|f\|\}$  centrata in  $f$  e avente raggio  $\|f\|$  essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta.

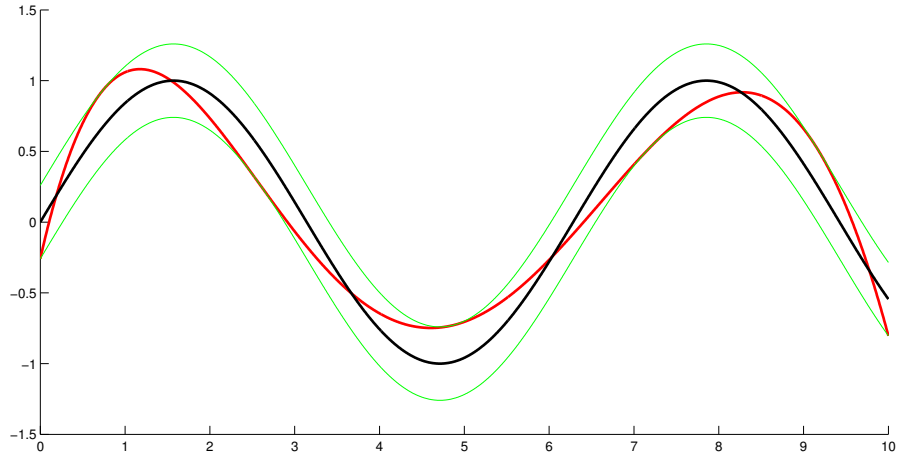


FIGURA 1.1. *Equioscillazione: in nero  $\sin(x)$  in  $[0, 10]$ , in rosso il polinomio di miglior approssimazione  $p_5^*$  di grado 5, in verde le funzioni  $f \pm E_n(f)$ . Si notino le 7 intersezioni dell'approssimante  $p_5^*$  con il grafico di  $f \pm E_n(f)$ .*

Quindi per il teorema di Weierstrass la funzione  $d(f, \cdot)$  ha minimo  $p^*$  in  $B_S(f, \|f\|)$  e di conseguenza in  $E(f) = \|f - p^*\|$ .  $\square$

**COROLLARIO 1.1.** *Per ogni  $k \geq 0$ , fissata  $f \in (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  esiste un polinomio  $p_k^* \in \mathbb{P}_k$  di miglior approssimazione.*

Riguardo l'unicità di tale  $p_k^*$  (cf.[2], p.112, [4], [6, p.149], [3, p.3]).

**TEOREMA 1.6** (di equioscillazione (Chebyshev,  $\approx 1850$ )). *Sia  $f \in C([a, b])$  con  $[a, b]$  limitato e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora esiste un unico elemento  $p_n^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono  $n + 2$  elementi  $a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$  tali che*

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \|f - p_n\|_\infty, \quad j = 0, 1, \dots, n + 1$$

con  $\sigma = 1$  oppure  $\sigma = -1$ .

**1.1. Algoritmo di Remez.** Il calcolo del polinomio  $p^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione di una funzione  $f \in C([a, b])$  non è semplice.

- L'algoritmo di Remez, scoperto nel 1934, ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice (cf. [3, p.12]).
- Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [5]). Il relativo comando si chiama **remez**.

Digitando sulla shell di Matlab

```
>>deg=10;
>> x=chebfun('x',[-5 5]);
>> f=1./(1+x.^2);
>>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in  $p$  il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della funzione di Runge  $1/(1 + x^2)$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  (come stabilito dalla seconda riga).

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $ x-4 $	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e-01$	$1.61e-01$	$1.08e-01$
10	$6.59e-02$	$8.40e-02$	$7.03e-04$
15	$2.98e-02$	$5.68e-02$	$2.31e-08$
20	$9.04e-03$	$4.28e-02$	$6.69e-12$
25	$4.08e-03$	$3.43e-02$	$2.33e-15$
30	$1.24e-03$	$2.86e-02$	—
35	$5.60e-04$	$2.46e-02$	—
40	$1.70e-04$	$2.15e-02$	—
45	$7.68e-05$	$1.91e-02$	—
50	$2.33e-05$	$1.72e-02$	—
55	$1.05e-05$	$1.56e-02$	—
60	$3.20e-06$	$1.43e-02$	—
65	$1.44e-06$	$1.32e-02$	—
70	$4.38e-07$	$1.23e-02$	—
75	$1.98e-07$	$1.14e-02$	—
80	$6.01e-08$	$1.07e-02$	—
85	$2.71e-08$	$1.01e-02$	—
90	$8.24e-09$	$9.51e-03$	—
95	$3.72e-09$	$9.00e-03$	—
100	$1.13e-09$	$8.55e-03$	—

TABELLA 1.1

*Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior approssimazione relativamente a  $1/(1+x^2)$ ,  $|x-4|$  e  $\sin(x)$  in  $[-5, 5]$ .*

**1.2. Alcuni esempi.** Dalla Tabella, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a parità di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al  $|x-4|$  e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante.

Queste vengono fornite dai seguenti **teoremi di Jackson** [4, p.142], [1, p.224].

**1.3. Modulo di continuità.** DEFINIZIONE 1.4 (Modulo di continuità). *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La quantità*

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

*si chiama modulo di continuità di  $f$ .*

NOTA. 1.3. *Se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è  $L$ -lipschitziana, cioè*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [a, b]$$

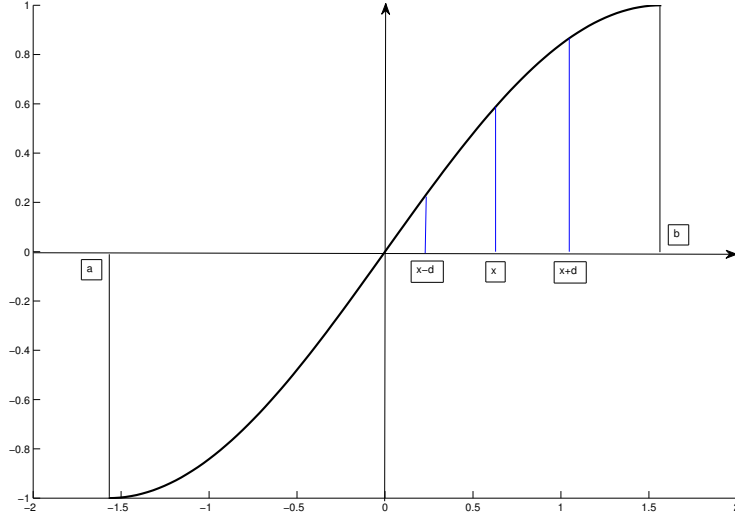


FIGURA 1.2. Fissato un certo  $x$  si calcola il massimo di  $|f(x_1) - f(x_2)|$  con  $x_1, x_2 \in [x-d, x+d]$ . Quindi si calcola l'estremo superiore di questa quantità al variare di  $x \in [a, b]$ , ottenendo  $\omega(f, d)$ .

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} L|x-y| = L\delta.\end{aligned}$$

NOTA. 1.4. Sia  $[a, b]$  chiuso e limitato. Se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $f \in C^{(1)}([a, b])$  allora è  $L$ -lipschitziana con  $L = \max_{x \in [a, b]} |f^{(1)}(x)|$ .

NOTA. 1.5. Se la funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\alpha$ -holderiana ( $\alpha \in (0, 1)$ ), cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha, \quad x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} L|x-y|^\alpha = L\delta^\alpha.\end{aligned}$$

TEOREMA 1.7 (Jackson, 1912). Per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $f \in C([a, b])$  esiste una costante  $M$  indipendente da  $n, a, b$  tale che

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove  $\omega(f, \cdot)$  è il modulo di continuità della funzione  $f$  su  $[a, b]$

COROLLARIO 1.2. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è  $L$ -lipschitziana, allora esiste una costante  $M$  indipendente da  $n, a, b$  tale che

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{b-a}{n}.$$

TEOREMA 1.8 (Jackson). Se  $f \in C^p([a, b])$ ,  $p \geq 0$  si ha per ogni  $n > p$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \omega\left(f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p}\right).$$

COROLLARIO 1.3. Se  $f^{(p)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p > 0$  è  $\alpha$ -holderiana (di costante  $L$ ), allora esiste una costante  $M$  indipendente da  $n, a, b$  tale che

$$E_n(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \cdot L \cdot \left(\frac{b-a}{n-p}\right)^\alpha.$$

TEOREMA 1.9 (Jackson). Se  $f \in C^k([a, b])$ , ed  $f^{(k)}$  è  $\alpha$  holderiana, cioè

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^\alpha, x, y \in [a, b]$$

per qualche  $M > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Allora esiste una costante  $d_k$  indipendente da  $f$  e  $n$  per cui

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M d_k}{n^{k+\alpha}}, n \geq 1.$$

Ricordiamo che (cf. [6, p.12]).

DEFINIZIONE 1.5. Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  una regione del piano complesso e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  si dice analitica in  $z_0$  se ha una rappresentazione della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di  $z_0$ .

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione si dice analitica in  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  se e solo se è analitica in ogni punto di  $\Omega$ .

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $\exp(z)$ . La funzione di Runge  $1/(1+z^2)$  è analitica in ogni regione non contenente  $-i$  e  $+i$ .

TEOREMA 1.10. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[a, b]$ , allora esiste  $\theta \in (0, 1)$  tale che

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n).$$

TEOREMA 1.11 (Bernstein). Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{1/n} = 0$$

se e solo se  $f$  è intera (cioè si può scegliere  $\Omega = \mathbb{C}$ ).

NOTA. 1.6. Si osservi che nel precedente teorema si dice che se la funzione  $f$  è intera allora la miglior approssimante ha asintoticamente un errore inferiore rispetto al caso in cui  $f$  sia analitica in un aperto contenuto nel piano complesso.

- Per quanto visto, la funzione di Runge  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[-5, 5]$  (si noti che possiede i soli poli in  $-i$  e  $i$ ) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che  $E_n(f) = O(\theta^n)$  con  $\theta \approx 0.814$ .
- La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di  $f(x) = \sin(x)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è molto rapida. In effetti  $\sin(z)$  è intera.
- Nel caso di  $f(x) = |x-4|$  da  $||x-4| - |y-4|| \leq |x-y|$  e dal fatto che per  $x \leq 4$  si ha  $f(x) = 4-x$  mentre per  $x > 4$  si ha  $f(x) = x-4$  si vede facilmente che per  $\delta \leq 5$

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [-5, 5], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| = \delta$$

e quindi dal Teorema di Jackson che per qualche  $M$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{5 - (-5)}{n} = \frac{10M}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti  $a = -5$  e  $b = 5$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{10}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di  $E_n(f)$  a 0, se paragonata alla quantità  $E_n(f) \approx 0.814^n$  trovata nell'esempio di Runge.

**1.4. Alcune note sui polinomi di Chebyshev ( $\sim 1850$ ).** Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con  $x \in [-1, 1]$  (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno,  $T_n$  non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che  $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$ ,  $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$ . Dalle formule trigonometriche di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta) \\ \cos((n-1)\theta) &= (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

sommando membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

Posto  $\theta = \arccos(x)$  si ha

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

poiché

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

Di conseguenza, per ricorrenza, essendo



- $T_0(x) = 1$ ,
- $T_1(x) = x$ ,

si deduce che  $T_n$  è un polinomio, detto di Chebyshev, di grado  $n$  e che inoltre per  $n > 0$  è del tipo  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ .

Gli zeri  $x_k$  del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui  $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$ , per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev sono

- esattamente  $n$ ,
- distinti,
- nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**1.5. Costanti di Lebesgue.** Sia  $f \in C([a, b])$ , con  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio  $p_n \in \mathbb{P}_n$  che interpola le coppie  $(x_k, f(x_k))$  (per  $k = 0, \dots, n$ ,  $x_k$  a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione  $f_k := f(x_k)$ . Come è noto, indicato con  $L_k$  il  $k$ -simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_k - x_j).$$

Supponiamo che i valori di  $f_k$  siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con  $\tilde{f}_k$ .

Quindi il polinomio interpolatore è  $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x)$ . Essendo  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$  abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero  $\Lambda_n$  dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

Il valore  $\Lambda_n$  è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti  $x_0, \dots, x_n$  (cf. [11]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [4, p.139-140]).

Ricordiamo che se  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sono due spazi normati,  $A : X \rightarrow Y$  è un **operatore lineare limitato** se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito.

Il numero reale  $\|A\|$  si chiama **norma dell'operatore lineare**  $A$  (cf. [8, p.224]).

NOTA. 1.7. *Essendo, per ogni  $\tilde{x} \in X$ ,  $\tilde{x} \neq 0$ .*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \\ &\geq \frac{\|A\tilde{x}\|_Y}{\|\tilde{x}\|_X} \end{aligned}$$

*deduciamo facilmente che  $\|A\|$  è la più piccola costante  $C$  per cui*

$$\|A\tilde{x}\|_Y \leq C\|\tilde{x}\|_X.$$

*per ogni  $x \in X$ .*

*Si osservi che qualsiasi sia  $C$ , l'asserto è banalmente vero per  $\tilde{x} = 0$ .*

Si può mostrare che se

$$\mathcal{L}_n : (C([a, b]), \infty) \rightarrow (C([a, b]), \infty)$$

è l'operatore (lineare e limitato) che associa a  $f \in C([a, b])$  il suo polinomio di interpolazione  $p_n$  nei nodi  $x_0, \dots, x_n$  allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione  $\mathcal{L}_n$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

NOTA. 1.8. *Si osservi che mentre nella norma di un operatore lineare e limitato è presente un sup, nella definizione precedente si dimostra che effettivamente è un max.*

TEOREMA 1.12. *Se  $f \in C([a, b])$  e  $p_n$  è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti  $x_0, \dots, x_n$  si ha*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)E_n(f) \quad (1.1)$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

DIMOSTRAZIONE. 1.3. *Se  $f \in \mathcal{P}_n$ , allora  $f \equiv p_n \equiv p_n^*$ , con  $p_n^*$  elemento di miglior approssimazione e quindi l'asserto è ovvio.*

*Supponiamo quindi che  $f \notin \mathcal{P}_n$ , cioè  $f - q_n \neq 0$ , per ogni  $q_n \in \mathcal{P}_n$ .*

*Per ogni  $q_n \in \mathcal{P}_n$ , è  $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$ , in quanto l'unico polinomio che interpola in  $n + 1$  punti distinti un polinomio di grado  $n$  è il polinomio stesso. Inoltre*

$$\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

*Poichè  $f - q_n$  non è la funzione nulla, abbiamo*

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \quad (1.2)$$

e di conseguenza

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \quad (1.3)$$

*Per concludere, osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da  $f - p = (f - q) + (q - p)$  e (1.3)*

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q_n - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di  $n + 1$  punti nell'intervallo  $[-1, 1]$  (cf. [9]):

- punti equispaziati: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$



FIGURA 1.3. *Henri Lebesgue (1875-1941).*

- punti di Chebyshev: corrispondono a  $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$  dove  $k = 1, \dots, n+1$ ; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove  $\gamma \approx 0.577$  è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [10]);

- punti di Chebyshev estesi: sono definiti da  $\frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$  dove  $k = 1, \dots, n+1$ ; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$

- configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Usando Matlab, notiamo quanto siano differenti  $\Lambda_n$  per  $n = 5, 10, \dots, 50$ .

```
>> n=(5:5:50)'; % GRADI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n)); % EQSP.
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) ); % CHEB.
>> [s t]
ans =
    2.9258e+000    3.1291e+000
    3.2720e+001    3.5150e+000
    5.9352e+002    3.7536e+000
    1.2877e+004    3.9267e+000
    3.0679e+005    4.0626e+000
    7.7425e+006    4.1746e+000
    2.0316e+008    4.2698e+000
    5.4825e+009    4.3526e+000
    1.5112e+011    4.4259e+000
    4.2351e+012    4.4915e+000
>>
```

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
- [3] D. Bini, *Approssimazione minimax*, <http://www.dm.unipi.it/~bini/Didattica/IAN/appunti/approx.pdf>
- [4] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [5] Chebfun, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972-chebfun>
- [6] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.
- [7] D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.
- [8] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.
- [9] S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, *Annales Mathematicae et Informaticae*, p. 109-123, 33 (2006) <http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami>.
- [10] Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), [http://it.wikipedia.org/wiki/Costante\\_di\\_Eulero-Mascheroni](http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni).
- [11] Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), [http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue\\_constant\\_\(interpolation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation)).