

Equazione di Poisson.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

23 maggio 2016

Equazione di Poisson, caso univariato.

Problema.

Consideriamo il problema ai valori al contorno

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

Supponiamo

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $q \in C^{(0)}([a, b])$, $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$,
- $g \in C^{(0)}([a, b])$.

Nota.

Per una dimostrazione di esistenza, unicità e regolarità della soluzione y , si consulti [1, p.671].

Equazione di Poisson, caso univariato.

Di seguito consideriamo quale esempio il caso particolare di

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (2)$$

cioè

$$\boxed{\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}} \quad (3)$$

con

- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $c > 0$,
- $f \in C^{(0)}([a, b])$.

Questo problema si dice di **Poisson univariato**.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Supponiamo che la **soluzione u** del problema di Poisson univariato, appartenga a $C^4([a, b])$. Allora dallo sviluppo di Taylor centrato in x , abbiamo

$$y(x+h) = y(x) + hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_1),$$

$$y(x-h) = y(x) - hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_2),$$

e quindi sommando membro a membro, dal teorema della media, per qualche $\xi \in (a, b)$,

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12}y^{(4)}(\xi),$$

da cui l'appross. della derivata seconda con le **differenze centrate**

$$y^{(2)}(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}. \quad (4)$$

Equazione di Poisson, caso univariato.

Allora, il problema di Poisson univariato, può essere discretizzato utilizzando le differenze centrate, ricavando

$$-\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + cy(x) \approx -y^{(2)}(x) + cy(x) = f(x)$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b) .

Consideriamo ora la **discretizzazione equipaziata** dell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq n + 1$$

con

$$h = \frac{b-a}{n+1}.$$

Equazione di Poisson, caso univariato.

Essendo, come visto,

$$-\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + cy(x) \approx -y^{(2)}(x) + cy(x) = f(x)$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b) , riscrivendo le equazioni relativamente ai punti $x = x_i$, intendiamo approssimare $y(x_k)$ con u_k risolvente il sistema di equazioni

$$-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + cu_k = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

dove $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Dopo facili conti, tali equazioni lineari possono essere riscritte come

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k+1} + (2 + ch^2)u_k - u_{k-1}) = f(x_k), \quad (6)$$

con $u_0 = u_{n+1} = 0$, ed essere convenientemente definite matricialmente come $Au = b$, dove A è la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 + ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2 + ch^2 \end{pmatrix}$$

e $b_k = f(x_k)$ per $k = 1, \dots, n$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Esempio

Vediamo un esempio, per $n = 4$, in cui i punti $x_k = x_0 + kh$ sono equispaziati e $x_0 = a$, $x_5 = b$ (cioè $h = (b - a)/5$).

Da $u_0 = y(a) = 0$, $u_5 = y(b) = 0$, da (6)

$$\frac{1}{h^2}(-u_2 + (2 + ch^2)u_1 - \cancel{u_0}) = f(x_1), \quad (7)$$

$$\frac{1}{h^2}(-u_3 + (2 + ch^2)u_2 - u_1) = f(x_2), \quad (8)$$

$$\frac{1}{h^2}(-u_4 + (2 + ch^2)u_3 - u_2) = f(x_3), \quad (9)$$

$$\frac{1}{h^2}(-\cancel{u_5} + (2 + ch^2)u_4 - u_3) = f(x_4), \quad (10)$$

ricaviamo facilmente che per aver un'approssimazione $u_k \approx y(x_k)$ della soluzione dovremo risolvere il sistema $Au = b$ con $b_k = f(x_k)$.

Nota.

Dall'esempio precedente, si capisce che se $u_0 = y(a) = \alpha$, $u_5 = y(b) = \beta$, l'unico effetto è che $Au = b$ con $b_1 = f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2}$, $b_n = f(x_n) + \frac{\beta}{h^2}$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

La matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 + ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2 + ch^2 \end{pmatrix}$$

è

- simmetrica, e definita positiva (per il primo ed il terzo teorema di Gershgorin), con lo spettro degli autovalori $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$ contenuto in $[c, c + 4h^{-2}]$;
- a predominanza diagonale stretta, essendo $c > 0$.

Equazione di Poisson, caso univariato.

Teorema

- Se y è la soluzione di (3) e $u_k \approx y(x_k)$ con $x_k = a + kh$, si ha

$$\frac{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_2}{\sqrt{n}} = O(h^2)$$

- se la soluzione $y \in C^{(4)}([a, b])$, allora (cf. [1, p.678])

$$\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24} \|y^{(4)}\|_\infty \|(x-a)(b-x)\|_\infty;$$

- essendo la matrice tridiagonale, il *sistema lineare* può essere risolto con l'eliminazione gaussiana con complessità $O(n)$.
- se $c = 0$, si può ancora mostrare che A è def. positiva e che per ogni h che $\sigma(A) = \{\lambda_i\} \subseteq [\delta, c + 4h^{-2}]$ con $\delta > 0$ indipendente da h .

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Problema. (Poisson bivariato)

L'equazione

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

dove

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (12)$$

determina il *problema di Poisson bivariato*, nel quadrato $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Definita la griglia di punti $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=0,\dots,n+1}$

$$x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad h = 1/(n+1), \quad i, j = 0, \dots, n+1$$

risulta evidente che per

- $i = 0$ o
- $j = 0, i = n+1$ o $j = n+1$

abbiamo un **punto del bordo** e quindi in virtù delle condizioni di Dirichlet in (11), il valore della soluzione u^* è determinato.

Vediamo cosa succede quando il punto della griglia \mathcal{G} è interno al quadrato $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, caratterizzati dall'avere $i, j = 1, \dots, n$.

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Si mostra facilmente, utilizzando la formula di Taylor bivariata centrata in (x, y) , in cui vengono tralasciati termini di ordine $O(h^2)$, che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \approx \frac{u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)}{h^2}$$

e quindi sommando le precedenti, si può approssimare $\Delta u(x, y)$ con
$$\frac{u(x + h, y) + u(x - h, y) + u(x, y + h) + u(x, y - h) - 4u(x, y)}{h^2}$$

e quindi essendo, $x_i = ih$, $y_j = jh$, si approssima $\Delta u(x_i, y_j)$ con

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2}. \quad (13)$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Da

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2} \quad (14)$$

ricaviamo la discretizzazione dell'equazione $\Delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_i)$
con

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (15)$$

per $i, j = 1, \dots, n$, con le condizioni al contorno

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = 0, j = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = n+1, j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, n, j = 0, j = n+1. \quad (18)$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

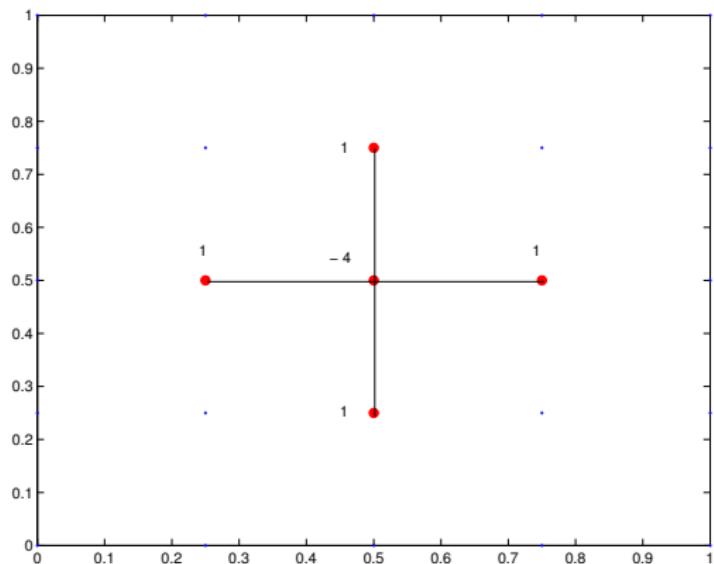


Figura : La molecola della discr. del Laplaciano avente centro $(0.5, 0.5)$ e $h = 0.25$. Si ricordi di dividere ogni valore nella molecola per h^2 .

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Purtroppo, la descrizione del sistema lineare non è troppo chiara.
Vediamola scritta matricialmente. Sia B la matrice $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed I la matrice identica di ordine n del tipo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Equazione di Poisson, caso bivariato.

Allora

- se b è il vettore ottenuto dai contributi dei termini dovuti a f e g in (11) e (15),
- A la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots \\ I & B & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}$$

- $u_{(j-1)n+i} := u(x_i, y_j)$ (soluzione numerica nei punti della griglia immagazzinata in un vettore, seguendo un opportuno ordinamento!),

si ricava che il sistema da risolvere è $Au = b$, usando ad esempio

- il metodo di Jacobi, o
- Gauss-Seidel, SOR o
- il gradiente coniugato.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Esempio

Facciamo un esempio sulla risoluzione dell'equazione di Poisson via metodo alle differenze con 5 punti.

Sia $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $h = 1/3$ e siano

$$P_{i,j} = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

E' chiaro che per

- per $i = 0$ i punti $P_{0,j}$ sono sull'asse $x = 0$ (cioè l'asse y),
- per $i = 3$ i punti $P_{3,j}$ sono sull'asse $x = 1$,
- per $j = 0$ i punti $P_{i,0}$ sono sull'asse $y = 0$ (cioè l'asse x)
- per $j = 3$ i punti $P_{i,3}$ sono sull'asse $y = 1$.

Date le condizioni al contorno, la soluzione in questi punti è nota ed è uguale a $u_{i,j} = g(x_i, y_j)$.

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

I rimanenti punti $P_{i,j}$, con $i,j = 1, 2$ sono interni a Ω ed è

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (19)$$

Analizziamo caso per caso queste equazioni:

- Nel caso $i = 1, j = 1$ si ha

$$u(x_2, y_1) + u(x_0, y_1) + u(x_1, y_2) + u(x_1, y_0) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1),$$

$$u(x_0, y_1) = g(x_0, y_1), \quad u(x_1, y_0) = g(x_1, y_0).$$

Portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_1) + u(x_1, y_2) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso $i = 2, j = 1$ si ha

$$u(x_3, y_1) + u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_2, y_0) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1),$$

$$u(x_3, y_1) = g(x_3, y_1), \quad u(x_2, y_0) = g(x_2, y_0)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0).$$

- Nel caso $i = 1, j = 2$ si ha

$$u(x_2, y_2) + u(x_0, y_2) + u(x_1, y_3) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_0, y_2) = g(x_0, y_2), \quad u(x_1, y_3) = g(x_1, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_2) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso $i = 2, j = 2$ si ha

$$u(x_3, y_2) + u(x_1, y_2) + u(x_2, y_3) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_3, y_2) = g(x_3, y_2), \quad u(x_2, y_3) = g(x_2, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_2) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3).$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Poniamo ora

$$b_1 := h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0),$$

$$b_2 := h^2 f(x_2, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0),$$

$$b_3 := h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3),$$

$$b_4 := h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3),$$

ordiniamo i punti da sinistra a destra, e dal basso verso l'alto (ordine lessicografico)

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_1), P_3 = (x_1, y_2), P_4 = (x_2, y_2),$$

e infine poniamo

$$u_1 = u(x_1, y_1), u_2 = u(x_2, y_1), u_3 = u(x_1, y_2), u_4 = u(x_2, y_2),$$

Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Otteniamo così

$$u_2 + u_3 - 4u_1 = b_1,$$

$$u_1 + u_4 - 4u_2 = b_2,$$

$$u_4 + u_1 - 4u_3 = b_3,$$

$$u_3 + u_2 - 4u_4 = b_4,$$

da cui posto

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

basta risolvere il sistema $Au = b$ per ottenere $u_1 = u(x_1, y_1)$, $u_2 = u(x_2, y_1)$,
 $u_3 = u(x_1, y_2)$, $u_4 = u(x_2, y_2)$.

Bibliografia



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.