Costante di Lebesgue

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

31 marzo 2015

Introduzione

Sia $f \in C([a,b])$, con $[a,b]$ limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \ldots, n$, x_k a due a due distinti). Sia $f_k := f(x_k)$ e L_k il k-simo pol. di Lagrange $L_k(x) := \prod_{i=0,\, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$. Si ha $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$.

La quantità

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} (\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|) \quad (1)$$

si chiama costante di Lebesgue ed è di fondamentale importanza in teoria dell'approssimazione.

A tal proposito si trova il seguente

Teorema

Se $f \in C([a,b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \ldots, x_n$ si ha

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \tag{2}$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal pol. di migliore approssimazione uniforme.

Quindi minore è Λ_n allora *potenzialmente* minore è l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale.

Alcune stime di costanti di Lebesgue

1. punti **equispaziati**: $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$
$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e(n+1)\log(n+1)};$$
2. punti di **Gauss-Chebyshev**: $\cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2(n+1)}\right)$, $k = 1, \ldots, n+1$;
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \frac{8}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni*
3. punti di **Chebyshev estesi**: $\cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2(n+1)}\right) \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$, $k = 1, \ldots, n+1$;
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$
4. **configurazione ottimale** (minimo Λ_n, non nota esplicitamente!)
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Esercizio 1

1. Eseguire un file Matlab che calcoli per ogni n i punti di Chebyshev estesi.
2. Per $n = 100$, si calcolino i punti di Gauss-Chebyshev

$$\mathbf{x} := \cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2(n+1)}\right),\ k = 1,\ldots,n+1$$

e Chebyshev estesi

$$\mathbf{y} := \cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2(n+1)}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)},\ k = 1,\ldots,n+1.$$

- Sono i due insiemi *vicini*? Per vederlo, se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sono vettori colonna di uguale dimensione, determinare la matrice $n \times 2$ $[\mathbf{x}\ \ \mathbf{y}]$. Alternativamente, in formato *e*-short, determinare $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- In cosa differiscono (guardare gli estremi)?

Esercizio 1

Di seguito, nel caso $n = 10$, i punti di Chebyshev e Chebyshev estesi sono

```
 9.8982e-01   1.0000e+00
 9.0963e-01   9.1899e-01
 7.5575e-01   7.6352e-01
 5.4064e-01   5.4620e-01
 2.8173e-01   2.8463e-01
 2.8328e-16   2.8619e-16
-2.8173e-01  -2.8463e-01
-5.4064e-01  -5.4620e-01
-7.5575e-01  -7.6352e-01
-9.0963e-01  -9.1899e-01
-9.8982e-01  -1.0000e+00
```

e *distano*

```
-1.0179e-02
-9.3540e-03
-7.7715e-03
-5.5595e-03
-2.8971e-03
-2.9130e-18
 2.8971e-03
 5.5595e-03
 7.7715e-03
 9.3540e-03
 1.0179e-02
```

Esercizio 2

- Valutare per $n = 10 : 10 : 500$ le quantità
  1. $\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en\log(n)}$;
  2. $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right)\right)$ dove γ è la *costante di Eulero-Mascheroni* 0.57721566490153286;
  3. $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right)$;
  4. $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right)$.

  esibendo in un unico grafico in scala semilogaritmica le quantità calcolate.

  Suggerimento: usare il comando `legend` per distinguerle.
- Alcune di queste tendono ad avere lo stesso ordine di grandezza (vederlo numericamente e non dal plot)?
- Ció accade a partire da quale n?

Esercizio 3

Usando il codice

```
function [leb_constant]=costante_lebesgue(pts)
rows_chebvand=length(pts);
V_pts =gallery('chebvand',rows_chebvand,pts);
M=max(5000,10*rows_chebvand);
pts_leb=linspace(-1,1,M); % PUNTI TEST.
V_leb = gallery('chebvand',rows_chebvand,pts_leb);
leb_constant=norm(V_pts\V_leb,1);
```

- calcolare per $n = 10 : 10 : 100$ le costanti di Lebesgue dei punti equispaziati e di Gauss-Chebyshev;
- verificare la bontà della stima asintotica (determinare valori calcolati del codice e paragonarli numericamente con la stima teorica).

Nota.

Visto il malcondizionamento della matrice di Vandermonde, e' possibile che Matlab mostri alcuni warnings oltre $n = 60$ per i nodi equispaziati e le cifre ottenute, per problemi numerici, non corrisponderanno a quelle teoriche.