FFT

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

23 marzo 2015

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Si supponga che la funzione $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ sia in realtà continua in $[0, 2\pi]$ e periodica cioè $f(0) = f(2\pi)$. Dalla teoria è noto che possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \tag{1}$$

Usualmente non si calcola tutta la sommatoria ma si considera una sua approssimazione

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx)$$

per N sufficientemente grande.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Osserviamo che differentemente dalla classica interpolazione polinomiale in nodi generici, l'approssimante trigonometrica è disponibile se siamo in grado di calcolare numericamente la quantità

$$\xi_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx$$

per $k = -(N-1), \ldots, (N-1)$.

Per funzioni continue e periodiche, si prova che è una buona scelta utilizzare la formula dei trapezi composta ([1, p.285-288]).

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Supponiamo $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia continua. Utilizzando la formula composta dei trapezi basata su N intervalli equispaziati (N determina pure il numero di coefficienti di Fourier da calcolare!) e ricordando la periodicità abbiamo dopo qualche conto, posto $\tau = 2\pi/N$, che il coefficiente di Fourier $c_k(f)$ è tale che

$$\xi_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\tau(n-1))\cdot\exp(-ik(n-1)\tau).$$

Definiti

- $\mathcal{X}_n = \frac{1}{N} f(\tau(n-1))$ (con $n = 1, \ldots, N$);
- $\sigma_k := \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right)$,

abbiamo $\xi_{k-1} \approx \sigma_k$, in quanto

$$\begin{aligned}\xi_{k-1}(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-i(k-1)x)\,dx \\ &\approx \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right) = \sigma_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

La funzione Matlab `fft` mappa il generico vettore $u = (u_1, \ldots, u_N)$ in un vettore $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N)$ tale che

$$\mathcal{U}_k = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right)$$

Da

$$\begin{aligned} \xi_{k-1}(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp\left(-i(k-1)x\right)dx \\ &\approx \sum_{n=1}^{N} \mathcal{X}_n \cdot \exp\left(\frac{-i(k-1)2\pi(n-1)}{N}\right) = \sigma_k \end{aligned}$$

si ha che `fft` mappa $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_N)$, dove $\mathcal{X}_j = \frac{1}{N} f\left(\tau(j-1)\right)$, in $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ che approssima $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{N-1})$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Quindi, noto N e definita f, se scriviamo

```
>>n=1:N;
>>X_n=(1/N)*f(2*pi*n/N);
>>sigma_n=fft(X_n);
```

abbiamo che il k-simo integrale di indice (non negativo!) corrisponde al $(k+1)$-simo elemento del vettore σ_n (per $k = 0, \ldots, N-1$).

Nota.

Risulta importante osservare che `fft` *permette di approssimare solo integrali* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-i(k-1)x)\, dx$ *con* $k = 1, 2, \ldots$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Purtroppo si può mostrare che il $(k+1)$-simo elemento calcolato da FFT in realtà per problemi legati alla periodicità dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ è tale che

$$\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots.$$

Questo suggerisce che se sono rilevanti solo i termini di Fourier $\xi_{-(M-1)}, \ldots, \xi_{M-1}$ mentre gli altri sono di grandezza trascurabile, allora per $N = 2M - 1$

- applichiamo l'algoritmo FFT per calcolare $\xi_0, \ldots, \xi_N$,
- osservare che essendo rilevanti solo $\xi_{-(M-1)}, \ldots, \xi_{M-1}$
  - per $k = 0, \ldots, M-1$,
    $\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots \approx \xi_k$,
  - per $k = M, \ldots, 2M-2$,
    $\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots \approx$
    $\ldots + \xi_{k-(2M-1)} + \xi_k + \xi_{k+(2M-1)} + \ldots = \xi_{k-(2M-1)}$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Per vederlo meglio, supponiamo che sia per semplicità

$$f(x) = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \xi_k \exp(ikx)$$

e calcoliamo con `fft` il vettore $Y = (Y_1, \ldots, Y_{2N})$ (attenzione, con $2N$ coefficienti!).

- Se $1 \leq k \leq N$, allora ricordando che per $j < -(N-1)$ e $j > (N-1)$ si ha $\xi_j = 0$

$$\sigma_{k+1} = \ldots + \xi_{k-2N} + \xi_k + \xi_{k+2N} + \ldots = \xi_k.$$

- Se $N < k \leq 2N$ abbiamo con ragionamenti analoghi

$$\sigma_{k+1} = \ldots + \xi_{k-2N} + \xi_k + \xi_{k+2N} + \ldots = \xi_{k-2N}.$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi

Nota.

Risulta importante osservare che se $N = 2^r$, allora i coefficienti di Fourier $c_0, \ldots, c_{N-1}$ possono essere calcolati

- *con un classico algoritmo in $O(N^2)$ operazioni aritmetiche,*
- *con l'algoritmo noto come Fast Fourier Transform in sole $O(N \log_2 N)$ operazioni aritmetiche (cf. [1, p.181]),*

con un notevole risparmio in termini di complessità computazionale.

La funzione `fft` *implementa la Fast Fourier Transform ed è considerata una delle più rilevanti scoperte in ambito numerico per le sue molteplici applicazioni scientifiche.*

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Calcoliamo l'approssimazione

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \right) \exp(ikx). \qquad (3)$$

supposto che f sia una funzione continua e periodica in $[0, 2\pi]$ e N il numero di coefficienti calcolati da `fft`.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

La funzione Matlab

```
function sigma=fft_coeffs(f,N)
n=(1:N)'; X=(1/N)*f(2*(n-1)*pi/N);
sigma=fft(X);
```

calcola il vettore

$$\sigma_{k+1} \approx \ldots + \xi_{k-N} + \xi_k + \xi_{k+N} + \ldots$$

con

$$\xi_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx.$$

Se N è sufficientemente grande e $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ allora supponendo che circa metà di questi siano relativi a coefficienti di Fourier con indici positivi e metà a indici negativi

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sigma_{k+1}\exp(ikx) + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor+1}^{N-1} \sigma_{k+1}\exp(i(k-N)x). \quad (4)$$

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Per valutare l'approssimazione, noti i coefficienti, useremo quindi

```
function y=fft_eval(sigma,x)
if size(x,1) == 1, x=x'; end
if size(sigma,1) == 1, sigma=sigma'; end
N=length(sigma); M=floor(N/2);
k=(M-N+1):M;
V=exp(i*x*k);
tpos=sigma(1:M+1,1);
tneg=sigma(M+2:end,1);
t=[tneg; tpos];
y=V*t;
```

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Esempio

Approssimiamo la funzione

$$f(x) = 3 \cdot \exp(-ix) + 8 \cdot \exp(+7ix) + \sin(x)$$

che è ovviamente periodica. Ricordiamo che

$$\sin(x) = \frac{(\exp(ix)) - \exp(-ix))}{2i}.$$

Evidentemente sono tutti nulli i coefficienti di Fourier il cui indice

- *è strettamente inferiore a* -1*,*
- *è strettamente maggiore di* 7*.*

Quindi una buona scelta è $N = 16$*, in quanto potenza di* 2 *e tutti i coefficienti interessanti hanno indice nell'intervallo* $[-\lfloor N/2 \rfloor + 1, \lfloor N/2 \rfloor]$.

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Così salviamo in `fft_example.m`

```
function fft_example

N=16;
f=inline('exp(-i*x)+exp(7*i*x)+sin(x)');
sigma=fft_coeffs(f,N);

for ii=1:length(sigma)
        fprintf('\n \t ii: %3.0f sigma(ii): (%1.15e,%1.15e *i)',?
         ii,real(sigma(ii)),imag(sigma(ii)));
end

x=(0:0.01:2*pi)';
fx=f(x);
tx=fft_eval(sigma,x);

err=norm(fx-tx,inf);
fprintf('\n \n \t [err, inf norm]: %2.2e',err)

fprintf('\n \n');
```

Calcolo dell'espansione di funzioni continue e periodiche con polinomi trigonometrici complessi: esempio

Abbiamo come risultato

```
>> fft_example
   ii:   1 sigma(ii): (1.602884491802570e-15,-2.188361991340898e-16 *i)
   ii:   2 sigma(ii): (8.881784197001252e-16,-4.999999999999974e-01 *i)
   ii:   3 sigma(ii): (3.539041184610228e-16,7.135991318617358e-15 *i)
   ii:   4 sigma(ii): (-9.048317650695026e-15,2.779013696085389e-15 *i)
   ii:   5 sigma(ii): (-4.822531263215524e-15,-4.895650690367562e-15 *i)
   ii:   6 sigma(ii): (-9.992007221626409e-16,-3.493746393046745e-15 *i)
   ii:   7 sigma(ii): (-1.692596980546846e-15,-7.115822743877410e-16 *i)
   ii:   8 sigma(ii): (8.000000000000000e+00,-7.670411816017961e-15 *i)
   ii:   9 sigma(ii): (1.769417945496343e-15,-7.461921358310391e-16 *i)
   ii:  10 sigma(ii): (4.440892098500626e-16,-3.507075473673624e-15 *i)
   ii:  11 sigma(ii): (5.044555338778801e-15,-4.659328277244503e-15 *i)
   ii:  12 sigma(ii): (9.048317650695026e-15,2.556969091160358e-15 *i)
   ii:  13 sigma(ii): (-4.649058915617843e-16,7.483336034202933e-15 *i)
   ii:  14 sigma(ii): (-7.771561172376096e-16,2.501457939929100e-15 *i)
   ii:  15 sigma(ii): (-1.790727759214582e-15,-1.424237581148731e-16 *i)
   ii:  16 sigma(ii): (3.000000000000000e+00,5.000000000000010e-01 *i)

   [err, inf norm]: 5.75e-14
```

Così , a meno di piccoli errori,

- $\xi_1 \approx \sigma_2 = -0.5i$;
- $\xi_7 \approx \sigma_8 = 8$;
- $\xi_{-1} \approx \sigma_{16} = 3 + 0.5i$.

Esercizio

Esercizio

Cosa succede se in `fft_example.m` *si usa* $N = 13$ *invece di* $N = 16$*? Darne una spiegazione, controllando i valori assunti dal vettore* `Y`*.*

Esercizio

Modificare `fft_example.m` *per studiare l'approssimazione trigonometrica complessa della funzione* $f(x) = |x - \pi|$ *per* $N = 4, 8, 16, 32, 64$*. Come decresce l'errore? Eseguire sulla stessa figura il grafico di* f *in* $[0, 2\pi]$ *come pure della sua approssimazione con polinomi trigonometrici complessi per* $N = 16$*. Nota: in caso di warning, utilizzare solo la parte reale del vettore* `tx`*, tramite il comando* `tx=real(tx);`

Bibliografia

K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.