

# Equazione di Poisson.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica

23 maggio 2016

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

Da

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2} \quad (1)$$

ricaviamo la discretizzazione dell'equazione

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

nei punti  $(x_i, y_j)$ ,  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$ ,  $h=1/(n+1)$

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (3)$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ , con le condizioni al contorno

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = 0, j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = n+1, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, n, j = 0, j = n+1. \quad (6)$$

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

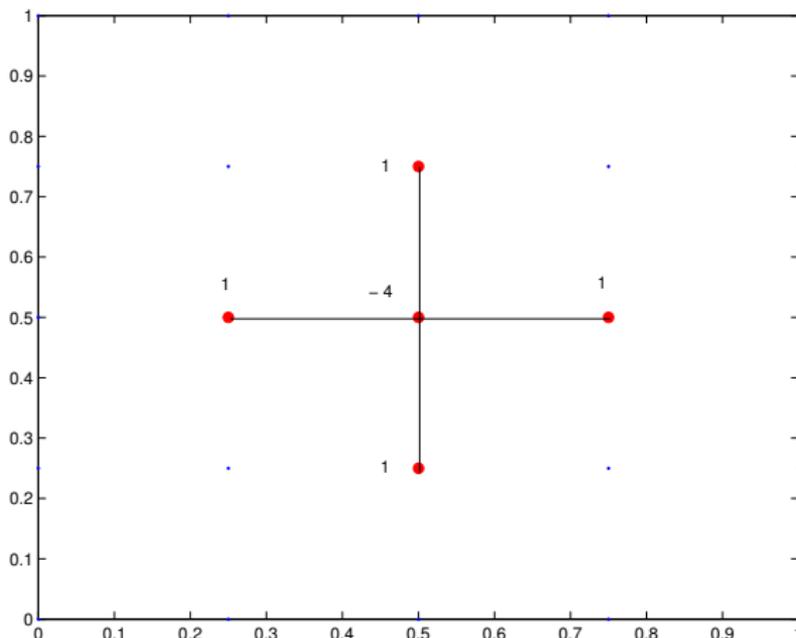


Figura : La molecola della discr. del Laplaciano avente centro  $(0.5, 0.5)$  e  $h = 0.25$ . Si ricordi di dividere ogni valore nella molecola per  $h^2$ .

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

Il sistema lineare ottenuto può essere descritto matricialmente. Sia  $B$  la matrice  $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed  $I$  la matrice identica di ordine  $n$  del tipo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

Allora

- se  $b$  è il vettore ottenuto dai contributi dei termini dovuti a  $f$  e  $g$  in (2) e (3),
- $A$  la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots \\ I & B & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}$$

si ricava che il sistema da risolvere è  $Au = b$ , usando ad esempio

- il metodo di Jacobi, o
- Gauss-Seidel, SOR o
- il gradiente coniugato.

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

Per una implementazione della matrice di Poisson  $A$ , utilizziamo la funzione `makefish.m`

```
function mat = makefish(siz);  
% make a Poisson matrix  
  
leng = siz*siz;  
dia = zeros(siz,siz);  
off = -eye(siz,siz);  
for i=1:siz, dia(i,i)=4; end;  
for i=1:siz-1, dia(i,i+1)=-1; dia(i+1,i)=-1; end;  
mat = zeros(leng,leng);  
for ib=1:siz,  
    mat(1+(ib-1)*siz:ib*siz,1+(ib-1)*siz:ib*siz) = dia; end;  
for ib=1:siz-1,  
    mat(1+(ib-1)*siz:ib*siz,1+ib*siz:(ib+1)*siz) = off;  
    mat(1+ib*siz:(ib+1)*siz,1+(ib-1)*siz:ib*siz) = off; end;  
return;
```

## Equazione di Poisson, caso bivariato.

Vediamone un esempio dalla shell di Matlab/Octave:

```
>> makefish(2)
ans =
     4     -1     -1     0
    -1     4     0    -1
    -1     0     4    -1
     0     -1     -1     4
>>
```

Si vede subito dal 4 sulla diagonale che `makefish` non calcola  $A$  ma  $-A$  e dovremo tener conto di questo dettaglio nell'implementazione.

Osserviamo che non è proprio facile determinare, fissato  $i, j$ , quali siano i punti adiacenti a  $(x_i, y_j)$  che essendo sul bordo hanno valore della soluzione noto a priori e quindi tali da contribuire attivamente al termine noto.

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Facciamo un esempio sulla risoluzione dell'equazione di Poisson via metodo alle differenze con 5 punti.

Sia  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $h = 1/3$  e siano

$$P_{i,j} = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

E' chiaro che per

- per  $i = 0$  i punti  $P_{0,j}$  sono sull'asse  $x = 0$  (cioè l'asse  $y$ ),
- per  $i = 3$  i punti  $P_{3,j}$  sono sull'asse  $x = 1$ ,
- per  $j = 0$  i punti  $P_{i,0}$  sono sull'asse  $y = 0$  (cioè l'asse  $x$ )
- per  $j = 3$  i punti  $P_{i,3}$  sono sull'asse  $y = 1$ .

Date le condizioni al contorno, la soluzione in questi punti è nota ed è uguale a  $u_{i,j} = g(x_i, y_j)$ .

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

I rimanenti punti  $P_{i,j}$ , con  $i, j = 1, 2$  sono interni a  $\Omega$  ed è

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (7)$$

Analizziamo caso per caso queste equazioni:

- Nel caso  $i = 1, j = 1$  si ha

$$u(x_2, y_1) + u(x_0, y_1) + u(x_1, y_2) + u(x_1, y_0) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1),$$

$$u(x_0, y_1) = g(x_0, y_1), \quad u(x_1, y_0) = g(x_1, y_0).$$

Portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_1) + u(x_1, y_2) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0).$$

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso  $i = 2, j = 1$  si ha

$$u(x_3, y_1) + u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_2, y_0) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1),$$

$$u(x_3, y_1) = g(x_3, y_1), \quad u(x_2, y_0) = g(x_2, y_0)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0).$$

- Nel caso  $i = 1, j = 2$  si ha

$$u(x_2, y_2) + u(x_0, y_2) + u(x_1, y_3) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_0, y_2) = g(x_0, y_2), \quad u(x_1, y_3) = g(x_1, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_2) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3).$$

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

- Nel caso  $i = 2, j = 2$  si ha

$$u(x_3, y_2) + u(x_1, y_2) + u(x_2, y_3) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_3, y_2) = g(x_3, y_2), \quad u(x_2, y_3) = g(x_2, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_2) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3).$$

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Poniamo ora

$$b_1 := h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0),$$

$$b_2 := h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3),$$

$$b_3 := h^2 f(x_1, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0),$$

$$b_4 := h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3),$$

ordiniamo i punti da sinistra a destra, e dal basso verso l'alto (ordine lessicografico)

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_1), P_3 = (x_1, y_2), P_4 = (x_2, y_2),$$

e infine poniamo

$$u_1 = u(x_1, y_1), u_2 = u(x_2, y_1), u_3 = u(x_1, y_2), u_4 = u(x_2, y_2),$$

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

ottenendo così

$$u_2 + u_3 - 4u_1 = b_1,$$

$$u_1 + u_4 - 4u_2 = b_2,$$

$$u_4 + u_1 - 4u_3 = b_3,$$

$$u_3 + u_2 - 4u_4 = b_4,$$

da cui posto

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

basta risolvere il sistema  $Au = b$  per ottenere  $u(x_1, y_1)$ ,  $u(x_2, y_1)$ ,  $u(x_1, y_2)$ ,  $u(x_2, y_2)$ .

## Equazione di Poisson: un esempio bivariato.

Notiamo che

```
>> makefish(2)
ans =
  4   -1   -1   0
 -1   4   0   -1
 -1   0   4   -1
  0   -1   -1   4
>>
```

calcola proprio  $-A$ , mentre il termine noto  $b$  può essere facilmente calcolato dopo aver notato che

- 1 i termini  $-g(x_i, y_0)$  sono presenti nelle componenti  $b_i$ ;
- 2 posto  $n = 1/h$ , per  $i = 1, \dots, n - 1$ , i termini  $-g(x_i, y_n)$  sono presenti nelle componenti  $b_{(n-1)^2 - (n-1) + i}$ ;
- 3 per  $j = 1, \dots, n - 1$ , i termini  $-g(x_0, y_j)$  sono presenti nelle componenti  $b_s$  con  $s \equiv 1 \pmod{n - 1}$ ;
- 4 per  $j = 1, \dots, n - 1$ , i termini  $-g(x_n, y_j)$  sono presenti nelle componenti  $b_s$  con  $s \equiv 0 \pmod{n - 1}$ .

## Equazione di Poisson: una implementazione.

Vediamo ora un'implementazione del metodo sopra descritto, detto per ovvi motivi *a 5 punti* (cf. (3)).

Risulta importante ricordare la seguente stima dell'errore

### Teorema

Se  $u$  è soluzione dell'equazione di Poisson (2) ed è almeno 4 volte differenziabile con continuità nel quadrato  $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$  ed  $u_h$  l'approssimazione ottenuta col metodo alle differenze con 5 punti, utilizzando una griglia  $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}$  con  $x_i = i h$ ,  $y_j = j h$ ,  $h = 1/(n+1)$  allora

$$|u(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j)| \leq ch^2$$

con

$$c = (1/24) \left( \max_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \right| + \max_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \right| \right)$$

Ci si aspetta quindi dai test numerici che effettueremo un errore dell'ordine di  $h^2$ .

# Equazione di Poisson: una implementazione.

Salviamo in `poisson5pts.m` la funzione

```
function u=poisson5pts(n,f,g_left,g_right,g_down,g_up)

A=-makefish(n);
h=1/(n+1);
x=(h:h:1-h)'; y=x;

% SOLUZIONI IN BASSO.
x_loc=x;
y_loc=zeros(size(x_loc));
b_down=feval(g_down,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI IN ALTO.
y_loc=ones(size(x_loc));
b_up=feval(g_up,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI A SINISTRA.
y_loc=x_loc; x_loc=zeros(size(x_loc));
b_left=feval(g_left,x_loc,y_loc);

% SOLUZIONI A DESTRA
x_loc=ones(size(x_loc));
b_right=feval(g_right,x_loc,y_loc);
```

# Equazione di Poisson: una implementazione.

```
% COMPOSIZIONE TERMINE NOTO.
b1=b_down;
% PRIMA RIGA IN BASSO.
b1(1)=b1(1)+b_left(1); b1(n)=b1(n)+b_right(1);
% PRIMA RIGA IN ALTO.
bn=b_up; bn(1)=bn(1)+b_left(n); bn(n)=bn(n)+b_right(n);
% RIGHE INTERMEDIE.
bj=[];
for j=2:(n-1)
    bjloc=zeros(n,1);
    bjloc(1)=bjloc(1)+b_left(j);
    bjloc(n)=bjloc(n)+b_right(j);
    bj=[bj; bjloc];
end
b=[b1; bj; bn];
% GRIGLIA LESSICOGRAFICA (METODO STANDARD).
lunghezza_x=length(x); X=[]; Y=[];
for index=1:lunghezza_x
    X=[X; x];
    Y=[Y; y(index)*ones(size(x))];
end
fXY=feval(f,X,Y);
b_f=(h^2)*fXY; b=b_f-b; u=A\b;
```

# Equazione di Poisson: una implementazione.

Salviamo in [demopoisson5pts.m](#) la demo

```
% MODIFIED VERSION: MARCH 13, 2008.

demo_example=2;

switch demo_example
case 1
    f=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_down=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_up=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_left=inline('ones(size(x))','x','y');
    g_right=inline('ones(size(x))','x','y');
    solution=inline('ones(size(x))','x','y');
case 2
    f=inline('zeros(size(x))','x','y');
    g_down=inline('exp(pi*x)','x','y');
    g_up=inline('-exp(pi*x)','x','y');
    g_left=inline('cos(pi*y)','x','y');
    g_right=inline('((exp(1))^pi)*cos(pi*y)','x','y');
    solution=inline('(exp(pi*x)).*cos(pi*y)','x','y');
```

## Equazione di Poisson: una implementazione.

```
case 3
    f=inline('(-2*(pi^2))*sin(pi*x).*sin(pi*y)', 'x', 'y');
    g_down=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_up=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_left=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_right=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    solution=inline('(sin(pi*x)).*sin(pi*y)', 'x', 'y');

otherwise
    f=inline('ones(size(x))', 'x', 'y');
    g_down=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_up=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_left=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    g_right=inline('zeros(size(x))', 'x', 'y');
    solution=inline('(sin(pi*x)).*sin(pi*y)', 'x', 'y');
end
```

# Equazione di Poisson: una implementazione.

```
for index=2:5
    n=2^index; h=1/(n+1); x=(h:h:1-h)'; y=x;
    [X,Y]=meshgrid(x,y); X=X'; Y=Y';
    % VETT. SOL. NEI PUNTI DELLA GRIGLIA ORD. IN LESSICOGRA..
    u=poisson5pts(n,f,g_left,g_right,g_down,g_up);
    % USO RESHAPE COSI' LA SOLUZIONE HA LE STESSA DIMENSIONI DELLE MATRICI X, Y.
    Z=(reshape(u,n,n));

    if demo_example <=3
        V=feval(solution,X,Y);
        err(index)=norm(V(:)-Z(:),inf);
        if index == 1
            fprintf('\n \t [n]: %4.0f [ERR]: %2.2e',n,err(index));
        else
            fprintf('\n \t [n]: %4.0f [ERR]: %2.2e [RATIO]: %2.2f',...
                n,err(index),err(index-1)/err(index));
        end
    end
end
surf(X,Y,Z);
```

## Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

Alcune osservazioni sui codici Matlab/Octave appena esposti.

- Posto  $h = \frac{1}{n+1}$ , allora la matrice  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mentre il termine noto  $b$  e il vettore soluzione  $u$  apparterranno a  $\mathbb{R}^{n^2}$ . dobbiamo risolvere un sistema lineare  $Au = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots & 0 \\ I & B & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B & I \end{pmatrix}$$

e  $b$  un vettore i cui contributi dipendono dai valori che hanno sul bordo le funzioni  $f$  e  $g$  che definiscono l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

## Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

- Dobbiamo tener conto che `makefish` non calcola  $A$  ma  $\bar{A} = -A$  ed è per questo che scriviamo  $A = -\text{makefish}(n)$ .
- **(Per i più esperti)** La funzione `meshgrid` crea a partire da due vettori di numeri reali  $x, y$ , le ascisse  $X$  e le ordinate  $Y$  dei punti facenti parte della griglia generata da  $x$  ed  $y$ . In particolare la matrice di punti

$$\begin{pmatrix} (x_1, y_1) & (x_2, y_1) & \dots & (x_n, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_1, y_n) & (x_2, y_n) & \dots & (x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

viene descritta tramite la griglia di ascisse e ordinate

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

e

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \dots & y_1 \\ y_2 & y_2 & \dots & y_2 \\ y_3 & y_3 & \dots & y_3 \end{pmatrix}$$

# Equazione di Poisson: descrizione dell'implementazione.

Così ad esempio

```
>>> h=1/3;  
>>> x=h:h:1-h;  
>>> x  
x =  
    0.3333    0.6667  
>>> y=x;  
>>> [X,Y]=meshgrid(x,y)  
X =  
    0.3333    0.6667  
    0.3333    0.6667  
Y =  
    0.3333    0.3333  
    0.6667    0.6667  
>>>
```

descrivendone le coordinate  $x$ ,  $y$ .

# Equazione di Poisson: esempio 1.

## Esempio

Si studi mediante il metodo alle differenze precedente descritto, l'equazione di Poisson nel quadrato unitario  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 1, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

la cui soluzione è  $u(x, y) = 1$ . Utilizzare  $n = 2, 4, \dots, 32$ .

Non è difficile osservare che

$$\max_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \right| = 0, \quad \max_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \right| = 0$$

e quindi ci si aspetta che per qualsiasi  $h$  si abbia un errore dell'ordine della precisione di macchina.

# Equazione di Poisson: esempio 1.

Lanciamo da shell il primo esempio della demo, ottenendo

```
>> demopoisson5pts
[n]:    4 [ERR]: 4.44e-016 [RATIO]: 163181252362740.50
[n]:    8 [ERR]: 1.11e-015 [RATIO]: 0.40
[n]:   16 [ERR]: 1.55e-015 [RATIO]: 0.71
[n]:   32 [ERR]: 6.66e-015 [RATIO]: 0.23
>>
```

Per *ratio* si intende il rapporto dell'errore tra due iterate successive.

## Equazione di Poisson: esempio 2.

### Esempio

*Si studi mediante il metodo alle differenze,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = \exp(\pi x), \quad x \in [0, 1] \\ u(x, 1) = -\exp(\pi x), \quad x \in [0, 1] \\ u(0, y) = \cos(\pi y), \quad y \in [0, 1] \\ u(1, y) = \exp(\pi) \cdot \cos(\pi y), \quad y \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (10)$$

*la cui soluzione è  $u(x, y) = \exp(\pi x) \cdot \cos(\pi y)$ . Utilizzare  $n = 2, 4, \dots, 32$ .*

## Equazione di Poisson: esempio 2.

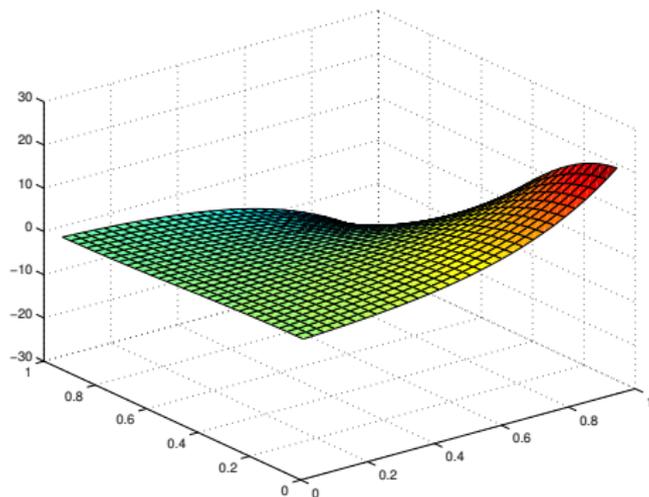


Figura : Soluzione del problema 2.

## Equazione di Poisson: esempio 2.

Si nota subito che per  $x, y \in [0, 1]$  si ha

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| = \pi^4 |\exp(\pi x) \cdot \cos(\pi y)| \leq \pi^4 \exp(\pi) \approx 2254.1$$

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| = \pi^4 |\exp(\pi x) \cdot \cos(\pi y)| \leq \pi^4 \exp(\pi) \approx 2254.1$$

da cui

$$c \leq (1/24) \cdot 2254.1 \cdot 2 \approx 187.8428.$$

Quindi quale maggiorazione dell'errore assoluto in norma infinito, per  $n = 3, 7, 15, 31$ , avremo i valori immagazzinati qui sotto nel vettore `err`

## Equazione di Poisson: esempio 2.

```
>> format short e
>> c=187.8428; err=[];
>> for n=2:5, N=2^n-1; h=1/(N+1); h2=h^2; err=[err; c*h2]; end
>> err
err =
  1.1740e+001
  2.9350e+000
  7.3376e-001
  1.8344e-001
>>
```

Lanciando la demo demopoisson5pts, per demoexample=2, abbiamo

```
>> demopoisson5pts
[n]:    4 [ERR]: 9.75e-002 [RATIO]: 0.74
[n]:    8 [ERR]: 3.20e-002 [RATIO]: 3.04
[n]:   16 [ERR]: 9.05e-003 [RATIO]: 3.54
[n]:   32 [ERR]: 2.45e-003 [RATIO]: 3.69
>>
```

## Equazione di Poisson: esempio 2.

- 1 Come ci si aspettava la maggiorazione è realizzata, ma purtroppo come stima è abbastanza conservativa.
- 2 Nella colonna [RATIO] abbiamo indicato il rapporto  $e_{2h}/e_h$  dove  $e_h$  è l'errore assoluto compiuto dal metodo a 5 punti con passo  $h$  (ovvero la quantità esposte nella colonna [ERR] nella stessa riga di  $h$ ). Il fatto che la *ratio* sia 4 non è sorprendente. Infatti se l'errore decresce come  $h^2$  si può supporre che sia  $e_h \approx \hat{c}h^2$  per qualche  $\hat{c}$  indipendente da  $h$  e quindi

$$\frac{e_{2h}}{e_h} \approx \frac{\hat{c}(2h)^2}{\hat{c}h^2} \approx 4.$$

## Equazione di Poisson: esempio 3.

### Esempio

Si risolva l'equazione di Poisson nel quadrato unitario

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(x, 1) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \\ u(1, y) = 0, \quad y \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (11)$$

la cui soluzione è  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , con il metodo alle differenze precedentemente descritto. Utilizzare  $n = 2, 4, \dots, 32$ .

## Equazione di Poisson: esempio 3.

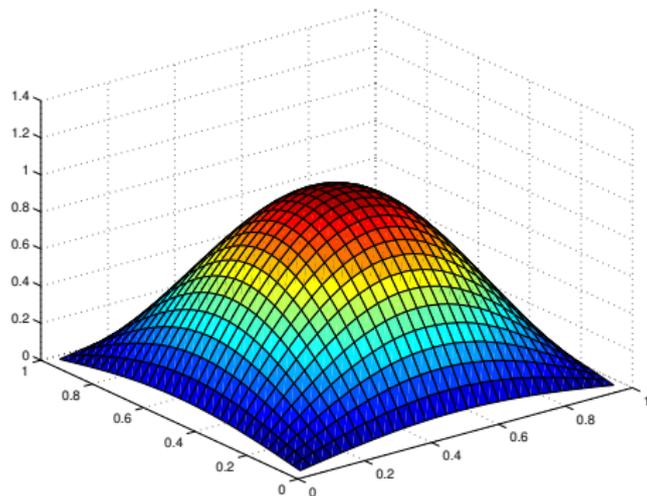


Figura : Soluzione del problema 3.

## Equazione di Poisson: esempio 3.

Ripetendo la stima basata sulle derivate quarte della soluzione  $u$  abbiamo facilmente

$$c \leq (1/24) 2 \pi^4 \approx 8.1174$$

da cui

```
>> c=8.1174;
>> err=[]; for n=2:5, N=2^n; N=N-1; h=1/(N+1); h2=h^2; err=[err; c*h2]; end
>> format short e
>> err
err =
  5.0734e-001
  1.2683e-001
  3.1709e-002
  7.9271e-003
>>
```

## Equazione di Poisson: esempio 3.

Lanciando la demo demopoisson5pts, per demoexample=3, abbiamo

```
>> demopoisson5pts
[n]:    4 [ERR]: 3.04e-002 [RATIO]: 2.39
[n]:    8 [ERR]: 9.91e-003 [RATIO]: 3.06
[n]:   16 [ERR]: 2.83e-003 [RATIO]: 3.51
[n]:   32 [ERR]: 7.54e-004 [RATIO]: 3.75
>>
```

Rispetto al caso precedente la stima è più precisa, e la ratio di circa 4 ci dice che la convergenza è ancora dell'ordine di  $h^2$ .

## Equazione di Poisson: esercizio.

### Esercizio

Si risolva l'equazione di Poisson nel quadrato  $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ u(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ u(0, y) = \sin(y), \quad y \in [0, \pi], \\ u(\pi, y) = \exp(\pi) \sin(y), \quad y \in [0, \pi]. \end{array} \right. \quad (12)$$

la cui soluzione è  $u(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ , con il metodo alle differenze precedentemente descritto. Utilizzare  $n = 2, 4, \dots, 32$ .

# Bibliografia



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.