

# AUTOVALORI DI UNA MATRICE \*

A. SOMMARIVA<sup>†</sup>

**Conoscenze richieste.** Matrici, vettori. Operazioni con matrici e vettori. Matrici simmetriche.

**Conoscenze ottenute.** Teoremi di Gerschgorin. Metodo delle potenze e loro convergenza. Metodo delle potenze inverse e loro convergenza. Metodo QR e loro convergenza.

**1. Calcolo degli autovalori di una matrice.** Il problema del calcolo degli autovalori di una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  consiste nel trovare gli  $n$  numeri (possibilmente complessi)  $\lambda$  tali che

$$\boxed{Ax = \lambda x, x \neq 0} \quad (1.1)$$

Si osservi che a seconda delle esigenze

- talvolta è richiesto solamente il calcolo di alcuni autovalori (ad esempio quelli di massimo modulo, per determinare lo spettro della matrice),
- talvolta si vogliono determinare tutti gli  $n$  autovalori in  $\mathbb{C}$ .

Per semplicità, dopo i **teoremi di localizzazione di Gershgorin**, mostreremo solo due metodi classici, uno per ognuna di queste classi, quello delle potenze e il metodo QR, rimandando per completezza alla monografia di Saad o a manuali di algebra lineare [1].

NOTA. 1.1. *Una interessante applicazione è l'algoritmo di **PageRank**, utilizzato da Google per fornire i risultati migliori tra i siti web relativamente a certe parole chiave ed in prima approssimazione basato sul calcolo di un autovettore relativo all'autovalore 1 (ad esempio via metodo delle potenze) di una matrice stocastica di dimensioni enormi.*

In questo paragrafo mostriamo tre teoremi di localizzazione di autovalori dovuti a Gershgorin (cf. [1, p.76]).

**TEOREMA 1.1** (Primo teorema di Gershgorin, (Brauer, 1946)). *Gli autovalori di una matrice  $A$  di ordine  $n$  sono tutti contenuti nell'unione dei cerchi di Gershgorin*

$$K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|\}$$

**ESEMPIO 1.1.** *Vediamo quale esempio la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

*Il primo teorema di Gershgorin stabilisce che gli autovalori stanno nell'unione dei cerchi di Gershgorin*

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 15| \leq |-2| + |2| = 4\}$$

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq |1| + |-3| = 4\}$$

$$K_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| \leq |-2| + |1| = 3\}$$

\*Ultima revisione: 13 aprile 2017

<sup>†</sup>Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@euler.math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

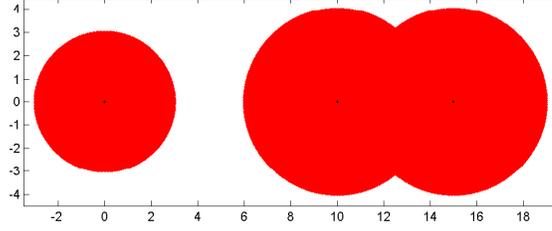


FIGURA 1.1. Cerchi di Gershgorin della matrice  $A$  definita in (1.5)

**TEOREMA 1.2** (Secondo teorema di Gershgorin, (Brauer, 1948)). *Se l'unione  $M_1$  di  $k$  cerchi di Gershgorin è disgiunta dall'unione  $M_2$  dei rimanenti  $n - k$ , allora  $k$  autovalori appartengono a  $M_1$  e  $n - k$  appartengono a  $M_2$ .*

**ESEMPIO 1.2.** *Relativamente a*

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

*applicando il secondo teorema di Gershgorin, dal confronto con la figura abbiamo che un autovalore sta nel cerchio  $K_3$  mentre due stanno nell'unione dei cerchi  $K_1, K_2$ .*

**DEFINIZIONE 1.1.** *Una matrice di ordine  $n \geq 2$  è **riducibile** se esiste una matrice di permutazione  $\Pi$  e un intero  $k, 0 < k < n$ , tale che*

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

*in cui  $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ ,  $A_{2,2} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ .*

**DEFINIZIONE 1.2.** *Una matrice si dice **irriducibile** se non è riducibile.*

**NOTA. 1.2.** *Per verificare se una matrice  $A = (a_{i,j})$  sia irriducibile, ricordiamo che data una qualsiasi matrice, è possibile costruire un grafo avente come nodi gli indici della matrice. In particolare, il nodo  $i$ -esimo è connesso al nodo  $j$ -esimo se l'elemento  $a_{i,j}$  è diverso da 0.*

*Il grafo associato si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia  $(i, j)$  posso raggiungere  $j$  a partire da  $i$ .*

*Una matrice è irriducibile se e solo se il grafo ad essa associata (detto di adiacenza) è fortemente connesso.*

*In altre parole, una matrice **riducibile** se e solo se il grafo di adiacenza ad esso associato non è fortemente connesso.*

**TEOREMA 1.3** (Terzo teorema di Gershgorin, (Brauer, 1948)). *Se la matrice di ordine  $n$  è irriducibile e un autovalore  $\lambda$  sta sulla frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin, allora sta sulla frontiera di ogni cerchio di Gershgorin.*

ESEMPIO 1.3. *La matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è irriducibile, in quanto il grafico di adiacenza è fortemente connesso. Gli autovalori stanno nella disco centrato in  $(2, 0)$  e raggio 2 (primo teorema di Gershgorin), ma non sulla frontiera (terzo teorema di Gershgorin). Quindi è non singolare.

Vediamo ora in Matlab quali sono effettivamente gli autovalori. si ha

```
>> A=[15 -2 2; 1 10 -3; -2 1 0]
A =
    15    -2     2
     1    10    -3
    -2     1     0
```

```
>> eig(A)
ans =
    0.5121
   14.1026
   10.3854
```

```
>>
```

a conferma di quanto stabilito dai primi due teoremi di Gershgorin.

NOTA. 1.3.

- Ricordiamo che  $A$  è una matrice a coefficienti reali, allora  $A$  e  $A^T$  hanno gli stessi autovalori (cf. [1, p.47]) e quindi applicando i teoremi di Gershgorin alla matrice trasposta possiamo ottenere nuove localizzazioni degli autovalori.
- Nel caso  $A$  sia a coefficienti complessi, se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora il suo coniugato  $\bar{\lambda}$  è autovalore della sua trasposta coniugata  $\bar{A}$ . Da qui si possono fare nuove stime degli autovalori di  $A$ .

ESERCIZIO 1.1. Cosa possiamo dire relativamente agli autovalori di  $A$  se applichiamo i teoremi di Gershgorin ad  $A^T$  invece che ad  $A$ ?

Il **metodo delle potenze**, come vedremo, è particolarmente indicato per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo di una matrice.

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  con

- $n$  autovettori  $x_1, \dots, x_n$  linearmente indipendenti,
- autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tali che

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (1.4)$$

A tal proposito ricordiamo (cf. [2], p. 951) i seguenti risultati.

- Una matrice  $A$  è **diagonalizzabile** se e solo se possiede  $n$  autovettori linearmente indipendenti.
- Se tutti gli autovalori di  $A$  sono distinti la matrice è diagonalizzabile; l'opposto è ovviamente falso (si pensi alla matrice identica).

- Una matrice simmetrica (hermitiana) è diagonalizzabile. L'opposto è ovviamente falso, visto che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

è diagonalizzabile visto che ha tutti gli autovalori distinti ma non è simmetrica.

TEOREMA 1.4 (Convergenza del metodo delle potenze, (Muntz, 1913)). *Siano*

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice diagonalizzabile con autovalori  $\lambda_k$  t.c.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

- $u_k \neq 0$  autovettori relativi all'autovalore  $\lambda_k$ , cioè  $Au_k = \lambda_k u_k$ .
- $y_0 = \sum_k \alpha_k u_k$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ .

La successione  $\{y_s\}$  del metodo delle potenze definita da

$$y_{s+1} = Ay_s \quad (1.6)$$

converge ad un vettore parallelo a  $u_1$  e il coefficiente di Rayleigh

$$\rho(y_s, A) := \frac{(y_s, Ay_s)}{(y_s, y_s)} \quad (1.7)$$

converge all'autovalore  $\lambda_1$ .

DIMOSTRAZIONE. 1.1. Per la dimostrazione si confronti [5, p.171]. Essendo la matrice  $A$  diagonalizzabile, esistono  $n$  autovettori  $u_k$  (relativi rispettivamente agli autovalori  $\lambda_k$ ) che sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $y_0 = \sum_k \alpha_k u_k$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ .

Essendo  $Au_k = \lambda_k u_k$  abbiamo

$$y_1 = Ay_0 = A\left(\sum_k \alpha_k u_k\right) = \sum_k \alpha_k Au_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k u_k$$

$$y_2 = Ay_1 = A\left(\sum_k \alpha_k \lambda_k u_k\right) = \sum_k \alpha_k \lambda_k Au_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k^2 u_k$$

e più in generale

$$y_{s+1} = Ay_s = A\left(\sum_k \alpha_k \lambda_k^s u_k\right) = \sum_k \alpha_k \lambda_k^s Au_k = \sum_k \alpha_k \lambda_k^{s+1} u_k.$$

Osserviamo ora che da  $y_{s+1} = \sum_k \alpha_k \lambda_k^{s+1} u_k$  deduciamo

$$\frac{y_{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} = \sum_k \alpha_k \frac{\lambda_k^{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} u_k \quad (1.8)$$

per cui essendo  $|\lambda_k| < |\lambda_1|$  qualora  $k \neq 1$ , necessariamente

$$\left| \frac{\lambda_k^{s+1}}{\lambda_1^{s+1}} \right| < 1, \quad k \neq 1$$

e di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^s = 0$$

e quindi la direzione di  $\frac{y_s}{\lambda_1^s}$ , che è la stessa di  $y_s$ , tende a quella dell'autovettore  $u_1$ .

Si osservi che il coefficiente di Rayleigh  $\rho(\cdot, A) = (x, Ax)/(x, x)$  è continuo in ogni  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  in quanto tanto il numeratore quanto il denominatore sono funzioni (multivariate) polinomiali (quadratiche) delle componenti  $x_k$  di  $x = (x_k)_k \in \mathbb{R}^n$ , che sono appunto continue.

Per continuità, se  $y_s/\lambda_1^s \rightarrow \alpha_1 u_1$  allora, essendo  $\lambda_1 \neq 0$ , da

$$\begin{aligned} \lim_s \rho(y_s, A) &:= \lim_s \frac{(y_s, Ay_s)}{(y_s, y_s)} = \lim_s \frac{(y_s/\lambda_1^s, A(y_s/\lambda_1^s))}{(y_s/\lambda_1^s, y_s/\lambda_1^s)} \\ &= \frac{(\alpha_1 u_1, A(\alpha_1 u_1))}{(\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1)} = \frac{(u_1, Au_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

ricaviamo che il coefficiente di Rayleigh  $\rho(y_s, A)$  converge a  $\lambda_1$ .

NOTA. 1.4. Il metodo converge anche nel caso in cui

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r$$

per  $r > 1$ , tuttavia non è da applicarsi quando l'autovalore di modulo massimo non sia unico.

NOTA. 1.5. In virtù di possibili underflow e underflow si preferisce normalizzare il vettore  $y_k$  precedente definito. Così l'algoritmo diventa

$$\begin{aligned} u_k &= At_{k-1} \\ t_k &= \frac{u_k}{\beta_k}, \quad \beta_k = \|u_k\|_2 \\ l_k &= \rho(t_k, A) \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove  $\rho(t_k, A)$  è il coefficiente di Rayleigh definito in (1.7).

Una variante particolarmente interessante del metodo delle potenze, detta **delle potenze inverse** è stata scoperta da Wielandt nel 1944 ed è particolarmente utile nel caso in cui  $A$  sia una matrice quadrata con  $n$  autovettori linearmente indipendenti,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > |\lambda_n| > 0. \quad (1.11)$$

e si desidera calcolare il **più piccolo autovalore in modulo**, cioè  $\lambda_n$ , applicando il metodo delle potenze ad  $A^{-1}$ .

Si ottiene così la successione  $\{t_k\}$  definita da

$$\begin{cases} Au_k = t_{k-1} \\ t_k = \frac{u_k}{\beta_k}, \\ \beta_k = \|u_k\|_2 \end{cases}$$

e convergente ad un vettore parallelo a  $x_n$ . La successione di coefficienti di Rayleigh è tale che

$$\rho(t_k, A^{-1}) := \frac{(t_k, A^{-1}t_k)}{(t_k, t_k)} = \frac{(t_k, u_{k+1})}{(t_k, t_k)} \rightarrow 1/\lambda_n. \quad (1.12)$$

da cui è immediato calcolare  $\lambda_n$ .

NOTA. 1.6.

- Se  $\{\xi_i\}$  sono gli autovalori di  $A^{-1}$  con

$$|\xi_1| > |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq \dots \geq |\xi_n|$$

allora il metodo delle potenze inverse calcola un'approssimazione di  $\xi_1$  e di un suo autovettore  $x$ .

- Si osserva subito che se  $A^{-1}x = \xi_i x$  (con  $\xi_i \neq 0$ ) allora  $x = A^{-1}x/\xi_i$  e  $Ax = A(A^{-1}x/\xi_i) = \xi_i^{-1}x$  cioè  $\xi_i^{-1}$  è un autovalore di  $A$  e che se  $x$  è autovettore di  $A^{-1}$  relativo all'autovalore  $\xi_i$ , allora  $x$  autovettore di  $A$  relativo all'autovalore  $\xi_i^{-1}$ . Conseguentemente se  $\xi_1$  è l'autovalore di massimo modulo di  $A^{-1}$  e  $\lambda_n$  è l'autovalore di minimo modulo di  $A$  si ha  $\lambda_n = \xi_1^{-1}$  e che

$$A^{-1}x = \xi_1 x \Rightarrow Ax = \xi_1^{-1}x = \lambda_n x.$$

Notiamo che il metodo delle potenze inverse, calcola  $\xi_1 = \lambda_n^{-1}$  e il relativo autovettore  $x$ .

NOTA. 1.7. Per ottenere  $\lambda_n$  viene naturale calcolare  $\xi_1^{-1}$ , ma usualmente essendo  $x$  autovettore di  $A$  relativo a  $\lambda_n$  si preferisce calcolare  $\lambda_n$  via il coefficiente di Rayleigh

$$\rho(x, A) := \frac{(x, Ax)}{(x, x)}.$$

METODO 1.1 (Potenze inverse con shift, [4], p. 181). In generale, fissato  $\mu \in \mathbb{C}$  è possibile calcolare, se esiste unico, l'autovalore  $\lambda$  più vicino a  $\mu$  tramite il seguente algoritmo:

$$\begin{cases} (A - \mu I) z_k = q_{k-1} \\ q_k = z_k / \|z_k\|_2 \\ \sigma_k = q_k^H A q_k. \end{cases} \quad (1.13)$$

- Ricordiamo che se  $\lambda$  è autovalore di  $A$  allora

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \mu I)x = \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)x$$

e quindi  $\lambda - \mu$  è autovalore di  $A - \mu I$ .

- Il metodo delle potenze inverse applicato a  $A - \mu I$  calcola il minimo autovalore  $\sigma = \lambda - \mu$  in modulo di  $A - \mu I$  cioè il  $\sigma$  che rende minimo il valore di  $|\sigma| = |\lambda_i - \mu|$ , dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $A$ .

Quindi essendo  $\lambda_i = \sigma_i + \mu$  si ottiene pure il  $\lambda_i$  più vicino a  $\mu$ .

- Per versioni più sofisticate di questa tecnica detta di *shift* (o in norma infinito invece che in norma 2) si confronti [1, p.379].

**Problema.** Si può applicare il metodo delle potenze inverse con shift  $\mu$  nel caso  $\mu$  sia proprio un autovalore di  $A$ ?

Il **metodo QR**, considerato tra i 10 algoritmi più rilevanti del ventesimo secolo, cerca di calcolare tutti gli autovalori di una matrice  $A$ .

LEMMA 1.1 (**Fattorizzazione QR**). Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Esistono

- $Q$  unitaria (cioè  $Q^T * Q = Q * Q^T = I$ ),
- $R$  triangolare superiore

tali che

$$A = QR.$$

Citiamo alcune cose:

- La matrice  $A$  ha quale sola particolarità di essere quadrata. Nel caso generale però la sua fattorizzazione QR in generale non è unica bensì determinata a meno di una matrice di fase (cf. [1, p.149]).
- Nel caso sia non singolare, allora tale fattorizzazione è unica qualora si chiedi che i coefficienti diagonali di  $R$  siano positivi.
- La routine Matlab `qr` effettua tale fattorizzazione. Si consiglia di consultare l'`help` di Matlab, per consultare le particolarità di tale routine.
- Se la matrice  $H$  è simile a  $K$  (cioè esiste una matrice non singolare  $S$  tale che  $H = S^{-1}KS$ ) allora  $H$  e  $K$  hanno gli stessi autovalori.
- Si può vedere facilmente che la relazione di similitudine è transitiva, cioè se  $H_1$  è simile ad  $H_2$  e  $H_2$  è simile ad  $H_3$  allora  $H_1$  è simile ad  $H_3$ .

Il metodo QR venne pubblicato indipendentemente nel 1961 da Francis e da Kublanovskaya e successivamente implementato in EISPACK. Ci limiteremo a considerare versioni di base del metodo.

LEMMA 1.2. Sia

$$A_0 = A = Q_0 R_0$$

e

$$A_1 := R_0 Q_0.$$

Le matrici  $A_0$  e  $A_1$  sono simili e quindi hanno gli stessi autovalori.

DIMOSTRAZIONE. 1.2. *Basta notare che*

$$Q_0 A_1 Q_0^T = Q_0 A_1 Q_0^T = Q_0 R_0 Q_0 Q_0^T = A_0$$

e quindi la matrice  $A_1$  è simile ad  $A_0$  (si ponga  $S = Q_0^{-1} = Q_0^T$ )

Definiamo il seguente metodo, detto QR, dovuto a Francis (1961).

METODO 1.2 (QR).

$$\begin{array}{l} A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{array}$$

Per un lemma precedente  $A_{k+1}$  è simile ad  $A_k$ , che è simile ad  $A_{k-1}, \dots, A_0$ . Quindi  $A_{k+1}$  essendo per transitività simile ad  $A_0$  ha gli stessi autovalori di  $A_0$ .

TEOREMA 1.5 (Convergenza metodo QR, [4], p. 169). *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ha autovalori tutti distinti in modulo, con*

$$|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| \quad (1.14)$$

allora l'alg. QR converge a  $A_\infty = (a_{i,j}^\infty)$  triangolare sup., cioè

$$\lim_k A_k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^\infty & a_{1,2}^\infty & \dots & \dots & a_{1,n}^\infty \\ 0 & a_{2,2}^\infty & a_{2,3}^\infty & \dots & a_{2,n}^\infty \\ 0 & 0 & a_{3,3}^\infty & \dots & a_{3,n}^\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1}^\infty & a_{n-1,n}^\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n}^\infty \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

con  $\lambda_k = a_{k,k}^\infty$ .

Inoltre

- Se la condizione (1.14) non è verificata si può dimostrare che la successione  $\{A_k\}$  tende a una forma triangolare a blocchi.
- se  $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ , e  $\lambda_{i-1} \neq 0$

$$|a_{i,i-1}^{(k)}| = \mathcal{O} \left( \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_{i-1}|} \right)^k, \quad i = 2, \dots, n, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

- se  $A$  è una **matrice Hessenberg superiore** allora l'algoritmo QR converge ad  $A_\infty$  triangolare a blocchi, simile ad  $A$  e con gli autovalori di ogni blocco diagonale tutti uguali in modulo.

Nelle implementazioni si calcola con un metodo scoperto da **Householder** (ma esiste un metodo alternativo dovuto a Givens) una matrice di Hessenberg  $T$

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \dots & a_{4,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

simile ad  $A$  ed in seguito si applica il metodo QR relativamente alla matrice  $T$ .

NOTA. 1.8. *Se  $A$  è simmetrica la matrice di Hessenberg  $T$  simile ad  $A$  risulta tridiagonale simmetrica.*

Si può mostrare che

- se  $A$  è una matrice di Hessenberg superiore, allora  $A = QR$  con  $Q$  di Hessenberg superiore.
- se  $A$  è tridiagonale allora  $A = QR$  con  $Q$  di Hessenberg e  $R$  triangolare superiore con  $r_{i,j} = 0$  qualora  $j - i \geq 2$ .
- le iterazioni mantengono la struttura, cioè
  - se  $A_0 = T$  è di Hessenberg, allora  $A_k$  è di Hessenberg,
  - se  $A_0 = T$  è tridiagonale allora  $A_k$  è tridiagonale.

NOTA. 1.9 (Operazioni trasformazioni in matrici di Hessenberg). *Il numero di moltiplicazioni necessarie*

- *all'algoritmo di Givens per calcolare tale matrice  $T$  a partire da  $A$  è approssimativamente  $10n^3/3$ ;*
- *all'algoritmo di Householder per calcolare tale matrice  $T$  a partire da  $A$  è approssimativamente  $5n^3/3$ .*

NOTA. 1.10 (Costo QR). *Il metodo QR applicato ad una matrice  $A$  in forma di Hessenberg superiore ha ad ogni passo un costo di  $2n^2$  operazioni moltiplicative.*

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, 1988.
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [3] G.H. Golub e C.F. Van Loan, *Matrix Computation, 3rd Edition*, The John Hopkins University Press 1996.
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica numerica*, 2001.
- [5] A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.