METODI ITERATIVI PER L'ALGEBRA LINEARE *

A. SOMMARIVA†

Conoscenze richieste. Spazi vettoriali, operazioni elementari con le matrici, programmazione in Matlab/Octave. Fattorizzazione LU. Norma di matrici.

Conoscenze ottenute. Metodi iterativi stazionari. Metodo di Jacobi. Metodo di Gauss-Seidel. Velocità di convergenza. Raggio spettrale e convergenza di un metodo stazionario. Metodi di rilassamento. Metodo SOR. Velocità di convergenza asintotica. Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per particolari matrici. Metodo del gradiente coniugato.

1. Metodi iterativi e diretti. PROBLEMA. 1.1. *Supponiamo che siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matrice non singolare), $b \in \mathbb{R}^n$ (vettore colonna). Bisogna risolvere il problema $Ax = b$ avente sol. unica x^*.*

A tal proposito si può utilizzare la fatt. LU con pivoting. Il costo computazionale è in generale di $O(n^3/3)$ operazioni moltiplicative. Questo diventa proibitivo se n è particolarmente elevato.

NOTA. 1.1. *Sia A una matrice invertibile. Allora $PA = LU$ dove*

- *P è una matrice di permutazione,*
- *L è una matrice triangolare inferiore a diagonale unitaria ($l_{ii} = 1, \forall i$),*
- *U una matrice triangolare superiore.*

Se $Ax = b$, nota $PA = LU$, per risolvere $Ax = b$ da $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$ si risolve prima $Ly = Pb$ e detta y^* la soluzione, si determina x^* tale che $Ux^* = y^*$.

- L'idea dei *metodi iterativi* è quello di ottenere una *successione di vettori* $x^{(k)} \to x^*$ *cosicchè per* $\bar{k} \ll n$ *sia* $x^{(\bar{k})} \approx x^*$.
- In generale, la soluzione non è ottenuta esattamente come nei metodi diretti in un numero finito di operazioni (in aritmetica esatta), ma quale limite, accontentandosi di poche iterazioni ognuna dal costo quadratico. Il costo totale sarà $O(\bar{k} \cdot n^2)$.

2. Metodi iterativi stazionari. Supponiamo che la matrice non singolare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sia tale che

$$\boxed{A = M - N, \text{ con } M \text{ non singolare.}}$$

Allora, se $Ax = b$ necessariamente $Mx - Nx = Ax = b$.
Di conseguenza da $Mx = Nx + b$

- moltiplicando ambo i membri per M^{-1},
- posto $\phi(x) = M^{-1}Nx + b$,

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = \phi(x).$$

Viene quindi naturale utilizzare la succ. del metodo di punto fisso

*Ultima revisione: 28 marzo 2017

†Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

$$\boxed{x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b.}$$

La matrice $P = M^{-1}N$ si dice di *iterazione* e non dipende, come pure b dall'indice di iterazione k. Per questo motivo tali metodi si chiamano *iterativi stazionari*.

Risulta utile anche scrivere la matrice A come $A = D - E - F$ dove

- D è una matrice diagonale,
- E è triangolare inferiore con elementi diagonali nulli,
- F è triangolare superiore con elementi diagonali nulli.

DEFINIZIONE 2.1. *Sia $A = M - N$, con M non singolare. Un metodo iterativo le cui iterazioni sono*

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b.$$

si dice iterativo stazionario.

La matrice $P = M^{-1}N$ si dice di matrice iterazione.

NOTA. 2.1. *Si osservi che la matrice di iterazione $M^{-1}N$ come pure $M^{-1}b$ non dipendono dall'indice di iterazione k.*

```
>> A=[1 2 3 4; 5 6 7 2; 8 9 1 2; 3 4 5 1]
A =
     1     2     3     4
     5     6     7     2
     8     9     1     2
     3     4     5     1
>> E=-(tril(A)-diag(diag(A)))
E =
     0     0     0     0
    -5     0     0     0
    -8    -9     0     0
    -3    -4    -5     0
>> F=-(triu(A)-diag(diag(A)))
F =
     0    -2    -3    -4
     0     0    -7    -2
     0     0     0    -2
     0     0     0     0
>> % A=diag(diag(A))-E-F.
```

2.1. Metodo di Jacobi. DEFINIZIONE 2.2 (Metodo di Jacobi, 1846).

Sia $A = D - E - F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dove

- *D è una matrice diagonale, non singolare*
- *E è triangolare inferiore con elementi diagonali nulli,*
- *F è triangolare superiore con elementi diagonali nulli.*

Sia fissato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Il metodo di Jacobi genera $\{x^{(k)}\}_k$ con

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

dove

$$\boxed{M = D,\ N = E + F.}$$

Si vede che la matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ è in questo caso

$$P = M^{-1}N = D^{-1}(E + F) = D^{-1}(D - D + E + F) = I - D^{-1}A.$$

NOTA. 2.2. *Se D è non singolare il metodo di Jacobi*

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

può essere descritto come metodo delle sostituzioni simultanee

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii},\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

NOTA. 2.3. *Si osservi che se D è non singolare, ovviamente $a_{i,i} \neq 0$ per ogni indice i e quindi la successione è ben definita.*

Vediamo perchè questa derivazione. Da $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ abbiamo

$$\sum_{j<i} a_{i,j}x_j + a_{i,i}x_i + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j = \sum_j a_{i,j}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, n$$

e quindi evidenziando x_i, supposto $a_{i,i} \neq 0$ deduciamo

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \left(\sum_{j<i} a_{i,j}x_j + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j \right) \right),\ i = 1, \ldots, n$$

Quindi note delle approssimazioni della soluzione $x^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}$ per $j = 1, \ldots, n$ è naturale introdurre il metodo iterativo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \left(\sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k)} + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^{(k)} \right) \right),\ i = 1, \ldots, n,$$

che si vede facilmente essere il metodo di Jacobi.

2.2. Metodo di Gauss-Seidel. DEFINIZIONE 2.3 (Metodo di Gauss-Seidel, 1823-1874).

Sia $A = D - E - F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dove

- *D è una matrice diagonale, non singolare*
- *E è triangolare inferiore con elementi diagonali nulli,*
- *F è triangolare superiore con elementi diagonali nulli.*

Sia fissato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Il metodo di Gauss-Seidel genera $\{x^{(k)}\}_k$ con

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

dove

$$\boxed{M = D - E,\ N = F.}$$

Si vede che la matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ è in questo caso

$$P = M^{-1}N = (D-E)^{-1}F. \tag{2.2}$$

NOTA. 2.4. *Se D è non singolare il metodo di Gauss-Seidel*

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$$

può essere descritto come metodo delle sostituzioni successive

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}. \tag{2.3}$$

NOTA. 2.5. *Si osservi che se D è non singolare, ovviamente $a_{i,i} \neq 0$ per ogni indice i e quindi la successione è ben definita.*

Vediamo perchè questa derivazione. Da $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ abbiamo

$$\sum_{j<i} a_{i,j}x_j + a_{i,i}x_i + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j = \sum_j a_{i,j}x_j = b_i,\ i = 1,\dots,n$$

e quindi evidenziando x_i, supposto $a_{i,i} \neq 0$ deduciamo

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \left(\sum_{j<i} a_{i,j}x_j + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j \right) \right),\ i = 1,\dots,n$$

Quindi note delle approssimazioni della soluzione $x^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}$ per $j > i$, e già calcolate $x^{(k+1)} = \{x_j^{(k+1)}\}$ per $j < i$ è naturale introdurre il metodo iterativo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \left(\sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{(k+1)} + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^{(k)} \right) \right),\ i = 1,\dots,n.$$

NOTA. 2.6.

- *Secondo Forsythe:*
  The Gauss-Seidel method was not known to Gauss and not recommended by Seidel.
- *Secondo Gauss, in una lettera a Gerling (26 dicembre 1823):*
  One could do this even half asleep or one could think of other things during the computations.

2.3. SOR. DEFINIZIONE 2.4 (Successive over relaxation, (SOR), 1884-1950).
Sia $A = D - E - F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dove

- *D è una matrice diagonale, non singolare*
- *E è triangolare inferiore con elementi diagonali nulli,*
- *F è triangolare superiore con elementi diagonali nulli.*

Sia fissato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e $\omega \in \mathbb{R}\backslash 0$. Il metodo SOR genera $\{x^{(k)}\}_k$ con

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

dove

$$\boxed{M = \frac{D}{\omega} - E, \;\; N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F}$$

NOTA. 2.7 ((cf.[1, p.555])).
SOR deriva dallo descrivere esplicitamente una iter. di Gauss-Seidel

$$z_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

e sostituirla con la combinazione convessa

$$x_i^{(k+1)} = \omega z_i^{(k+1)} + (1 - \omega) x_i^{(k)}.$$

cioè

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x^{(k)}.$$

Per convincersi dell'equivalenza tra formulazione matriciale ed equazione per equazione, osserviamo che

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x^{(k)}$$

diventa

$$x^{(k+1)} = \omega D^{-1} [b + E x^{(k+1)} + F x^{(k)}] + (1 - \omega) x^{(k)}$$

e dopo noiosi calcoli in cui si evidenziano $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$

$$\frac{D}{\omega} (I - \omega D^{-1} E) x^{(k+1)} = \frac{D}{\omega} \left(\omega D^{-1} F + (1 - \omega) \right) x^{(k)} + b$$

da cui

$$M = \frac{D}{\omega} - E, \;\; N = F + \frac{1 - \omega}{\omega} D = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F.$$

NOTA. 2.8. *Gauss-Seidel è SOR in cui si è scelto $\omega = 1$.*

NOTA. 2.9. *Notiamo che le iterazioni di SOR verificano l'uguaglianza*

$$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^k + M^{-1} b$$

con

$$M = \frac{D}{\omega} - E, \;\; N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$$

ed è

$$M - N = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F\right) = -E + D - F = A.$$

Quindi effettivamente $A = M - N$.

2.4. I metodi di Richardson stazionari. DEFINIZIONE 2.5 (Residuo). *Sia* A *una matrice quadrata* $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. *La quantità*

$$\boxed{r = b - Ax} \tag{2.4}$$

è nota come residuo (relativamente ad A *e* b*).*

DEFINIZIONE 2.6 (Metodo di Richardson stazionario, 1910). *Fissato* α, *un metodo di Richardson stazionario, con matrice di precondizionamento* P, *verifica*

$$\boxed{P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha r^{(k)}.} \tag{2.5}$$

dove il residuo alla k*-sima iterazione è*

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}. \tag{2.6}$$

2.5. I metodi di Richardson non stazionari. DEFINIZIONE 2.7 (Metodo di Richardson non stazionario). *Fissati* α_k *dipendenti dalla iterazione* k, *un metodo di Richardson non stazionario, con matrice di precondizionamento* P, *verifica*

$$\boxed{P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha_k r^{(k)}.} \tag{2.7}$$

NOTA. 2.10. *Si osservi che se* $\alpha_k = \alpha$ *per ogni* k, *allora il metodo di Richardson non stazionario diventa stazionario.*

PROPOSIZIONE. 2.1. *I metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, SOR, sono metodi di Richardson stazionari.*

DIMOSTRAZIONE. 2.1. *I metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, SOR, sono metodi iterativi del tipo*

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \tag{2.8}$$

per opportune scelte delle matrici M *(che dev'essere invertibile),* N *tali che* $A = M - N$. *Essendo* $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$,

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = Nx^{(k)} + b - Mx^{(k)} = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}. \tag{2.9}$$

Ne consegue che i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, SOR, verificano

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = r^{(k)} \tag{2.10}$$

In altri termini sono dei metodi di Richardson sono metodi di Richardson stazionari, con $\alpha = 1$ e matrice di precondizionamento $P = M$. △

Per quanto riguarda i metodi di Richardson precondizionati e non stazionari, un classico esempio è il metodo del gradiente classico che vedremo in seguito.

3. Norma di matrici. DEFINIZIONE 3.1 (Raggio spettrale). *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La quantità*

$$\boxed{\rho(A) := \max_i (|\lambda_i|)}$$

è detto raggio spettrale di A.

DEFINIZIONE 3.2 (Norma naturale). *Sia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ una norma vettoriale. Definiamo norma naturale (o indotta) di una matrice $A \in R^{n\times n}$ la quantità*

$$\boxed{\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.}$$

NOTA. 3.1. *Questa definizione coincide con quella di norma di un operatore lineare e continuo in spazi normati.*

ESEMPIO 3.1 ([4], p. 24).
Sia x un arbitrario elemento di R^n, $A \in R^{n\times n}$.

Norma vettoriale	*Norma naturale*
$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n \|x_k\|$	$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n \|a_{i,j}\|$
$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2\right)^{1/2}$	$\|A\|_2 = \rho^{1/2}(A^T A)$
$\|x\|_\infty := \max_k \|x_k\|$	$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \|a_{i,j}\|$

NOTA. 3.2.

- *Nella norma matriciale 1, di ogni colonna si fanno i moduli di ogni componente e li si somma. Quindi si considera il massimo dei valori ottenuti, al variare della riga.*
- *Nella norma matriciale ∞, di ogni riga si fanno i moduli di ogni componente e li si somma. Quindi si considera il massimo dei valori ottenuti, al variare della colonna.*

Per quanto riguarda un esempio chiarificatore in Matlab/Octave

```
>> A=[1 5; 7 13]
A =
     1     5
     7    13
>> norm(A,1)
ans =
```

```
    18
>> norm(A,inf)
ans =
    20
>> norm(A,2)
ans =
   15.5563
>> eig(A*A')
ans =
     2
   242
>> sqrt(242)
ans =
   15.5563
>> raggio_spettrale_A=max(abs(eig(A)))
raggio_spettrale_A =
   15.4261
>>
```

Si dimostra che (cf. [4, p.28])

TEOREMA 3.1. *Per ogni norma naturale $\|\cdot\|$ e ogni matrice quadrata A si ha $\rho(A) \leq \|A\|$. Inoltre per ogni matrice A di ordine n e per ogni $\epsilon > 0$ esiste una norma naturale $\|\cdot\|$ tale che*

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

e inoltre (cf. [4, p.29], [3, p.232])

TEOREMA 3.2 (Hensel 1926, Oldenburger 1940, Householder 1958). *Fissata una norma naturale $\|\cdot\|$, i seguenti asserti sono equivalenti*

1. $A^m \to 0$;
2. $\|A^m\| \to 0$;
3. $\rho(A) < 1$.

NOTA. 3.3.

- *Siano $\{\lambda_k\}_{k=1,\ldots,n}$ autovalori di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Il raggio spettrale*

$$\rho(A) = \max_k(|\lambda_k|)$$

non è una norma. Infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha raggio spettrale nullo, ma non è la matrice nulla.

- *Osserviamo che dagli esempi il raggio spettrale di una matrice A non coincide in generale con la norma 1, 2, ∞, ma che a volte $\rho(A) = \|A\|_2$ come nel caso di una matrice diagonale A (essendo gli autovalori di una matrice diagonale, proprio i suoi elementi diagonali).*

3.2. Convergenza dei metodi iterativi stazionari. DEFINIZIONE 3.3 (Matrice diagonalizzabile). *Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonalizzabile se e solo $\mathbb{R}^n$ possiede una base composta di autovettori di A.*

Equivalentemente $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale $\mathcal{D}$, cioè esiste S tale che

$$A = S^{-1}\mathcal{D}S.$$

DEFINIZIONE 3.4 (Metodo consistente). *Sia A una matrice non singolare e $Ax^* = b$. Il metodo stazionario*

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$$

si dice consistente relativamente al problema $Ax = b$ se e solo se

$$x^* = Px^* + c.$$

LEMMA 3.1. *Sia $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ un metodo iterativo stazionario. Supponiamo sia consistente, relativamente al problema $Ax = b$, cioè*

$$Ax^* = b \text{ implica } x^* = Px^* + c.$$

Allora, posto $e^{(k)} = x^{(k)} - x^{(*)}$ si ha che $e^{(k+m)} = P^m e^{(k)}$. In particolare, per $k = 0$ si ottiene $e^{(m)} = P^m e^{(0)}$.

DIMOSTRAZIONE. 3.1.

Basta osservare che

$$\begin{aligned} e^{(k+m)} &:= x^{(k+m)} - x^* = Px^{(k+m-1)} + c - (Px^* + c) \\ &= P(x^{(k+m-1)} - x^*) = \ldots = P^m(x^{(k)} - x^*) = P^m e^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

TEOREMA 3.3. *Se P è diagonalizzabile allora un metodo iterativo stazionario consistente $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ converge per ogni vettore iniziale x_0 se e solo se $\rho(P) < 1$.*

DIMOSTRAZIONE. 3.2. *Siccome P è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ possiede una base composta di autovettori di P.*

Consideriamo un metodo iterativo stazionario $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ in cui scelto $x^{(0)}$ si abbia

$$e^{(0)} := x^{(0)} - x^* = \sum_{s=1}^{n} c_s u_s$$

dove $\{u_k\}_k$ è una base di autovettori di P avente autovalori $\{\lambda_k\}_k$.

Supponiamo $|\lambda_s| < 1$ per $s = 1, \ldots, n$.

Se il metodo è *consistente*, cioè

$$x^* = Px^* + c$$

da un lemma precedente abbiamo $e^{(k)} = P^k e^{(0)}$ e da $Pu_s = \lambda_s u_s$, $x^{(0)} - x^* = \sum_{s=1}^n c_s u_s$

$$\begin{aligned} P^k e^{(0)} &= P^k \left(\sum_{s=1}^n c_s u_s \right) = \sum_{s=1}^n c_s P^k u_s = \sum_{s=1}^n c_s P^{k-1} P u_s \\ &= \sum_{s=1}^n c_s \lambda_s P^{k-1} u_s = \sum_{s=1}^n c_s \lambda_s^2 P^{k-2} u_s = \ldots = \sum_{s=1}^n c_s \lambda_s^k u_s. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Quindi se $|\lambda_s^k| < 1$ per ogni $s = 1, \ldots, n$ e $k = 1, 2, \ldots$, abbiamo

$$\|x^{(k)} - x^*\| = \| \sum_{s=1}^n c_s \lambda_s^k u_s \| \leq \sum_{s=1}^n |c_s| |\lambda_s^k| \|u_s\| \to 0.$$

Se invece per qualche k si ha $|\lambda^k| \geq 1$ e $c_k \neq 0$ allora $\|x^{(k)} - x^*\|$ non converge a 0 al crescere di k.

Infatti, se $\lambda_l \geq 1$ è l'autovalore di massimo modulo, posto

$$x^{(0)} - x^* = u_l$$

abbiamo da (3.1)

$$\|x^{(k)} - x^*\| = \|\lambda_l^k u_l\| = |\lambda_l^k| \|u_l\|$$

che non tende a 0. Di conseguenza non è vero che il metodo è convergente per qualsiasi scelta del vettore $x^{(0)}$. □

Introduciamo il teorema di convergenza nel caso generale, basato sul teorema di Hensel.

Teorema 3.4. *Un metodo iterativo stazionario consistente $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ converge per ogni vettore iniziale x_0 se e solo se $\rho(P) < 1$.*

Nota. 3.4.

- *Si noti che il teorema riguarda la convergenza per ogni vettore iniziale x_0 ed è quindi di convergenza globale.*
- *Non si richiede che la matrice P sia diagonalizzabile.*

Dimostrazione. 3.3 ([3], p. 236).

$\Leftarrow$ *Se $\rho(P) < 1$, allora $x = Px + c$ ha una e una sola sol. x^*. Infatti,*

$$x = Px + c \Leftrightarrow (I - P)x = c$$

e la matrice $I - P$ ha autovalori $1 - \lambda_k$ con $k = 1, \ldots, n$ tali che

$$0 < |1 - |\lambda_k|_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}} \leq |1 - \lambda_k|_{\mathbb{C}},$$

poichè $|\lambda_k|_{\mathbb{C}} \leq \rho(P) < 1$ *e quindi*

$$\det(I - P) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \lambda_k) \neq 0,$$

per cui la matrice $I - P$ *è invertibile e il sistema* $(I - P)x = c$ *ha una e una sola soluzione* x^**.*

DIMOSTRAZIONE. 3.4. *Sia* $e(k) = x^{(k)} - x^*$*. Come stabilito dal Teorema che lega norme a raggi spettrali, sia inoltre una norma naturale* $\|\cdot\|$ *tale che*

$$\rho(P) \leq \|P\| = \rho(P) + (1 - \rho(P))/2 < 1.$$

Da

- $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$,
- $x = Px + c$,

da un lemma precedente $e^{(k)} = P^k e^{(0)}$ *e quindi essendo* $\|\cdot\|$ *una norma naturale*

$$\|e^{(k)}\| = \|P^k e^{(0)}\| \leq \|P^k\|\|e^{(0)}\|. \tag{3.2}$$

Poichè il $\rho(P) < 1$*, abbiamo che* $\|P^k\| \to 0$ *da cui per (3.2) è* $\|e^{(k+1)}\| \to 0$ *e quindi per le proprietà delle norme* $e^{(k)} \to 0$ *cioè* $x^{(k)} \to x^*$*.*

DIMOSTRAZIONE. $\Rightarrow$ Supponiamo che la successione $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ converga a x^* per qualsiasi $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ma che sia $\rho(P) \geq 1$. Sia $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore in modulo di P e scegliamo $x^{(0)}$ tale che $e^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ sia autovettore di P relativamente all'autovalore $\lambda_{\max}$. Essendo $Pe^{(0)} = \lambda_{\max}e^{(0)}$ e $e^{(k+1)} = P^k e^{(0)}$ abbiamo che

$$e^{(k+1)} = \lambda_{\max}^k e^{(0)}$$

da cui, qualsiasi sia la norma $\|\cdot\|$, per ogni $k = 1, 2, \ldots$ si ha

$$\|e^{(k)}\| = |\lambda_{\max}^k|_{\mathbb{C}}\|e^{(0)}\| \geq \|e^{(0)}\|$$

il che comporta che la successione non è convergente (altrimenti per qualche k sarebbe $e^{(k)} < e^{(0)}$). □

3.3. Velocità di convergenza. PROPOSITO. 3.1. *L'analisi che faremo in questa sezione non è rigorosamente matematica. Ciò nonostante permette di capire il legame tra il raggio spettrale della matrice di iterazione* P *e la riduzione dell'errore.*

Supponiamo di voler approssimare x^* tale che $Ax^* = b$ con il metodo stazionario

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c.$$

Supporremo tale metodo consistente e quindi se $Ax^* = b$ allora

$$x^* = Px^* + c.$$

Inoltre indicheremo con $e^{(k)}$ l'errore

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x^*.$$

- Da un lemma precedente
$$e^{(k+m)} = P^m e^{(k)}. \tag{3.3}$$
- Si dimostra che se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\|\cdot\|$ è una norma naturale allora
$$\lim_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$$
Quindi per k sufficientemente grande si ha $\|P^k\|^{1/k} \approx \rho(P)$ ovvero $\|P^k\| \approx \rho^k(P)$.

Sotto queste ipotesi, per k sufficientemente grande, da
- $e^{(k+m)} = P^m e^{(k)}$,
- $\|P^k\| \approx \rho^k(P)$,

abbiamo
$$\|e^{(k+m)}\| = \|P^m e^{(k)}\| \leq \|P^m\|\|e^{(k)}\| \approx \rho^m(P)\|e^{(k)}\| \tag{3.4}$$
e quindi
$$\|e^{(k+m)}\|/\|e^{(k)}\| \lessapprox \rho^m(P). \tag{3.5}$$

Per cui da
$$\rho^m(P) \leq \epsilon \Rightarrow \|e^{(k+m)}\|/\|e^{(k)}\| \lessapprox \rho^m(P) \leq \epsilon$$
applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri, per avere una riduzione dell'errore di un fattore ϵ, asintoticamente servono al più m iterazioni con
$$m \log(\rho(P)) \approx \log(\epsilon)$$
e quindi
$$\boxed{m \approx \log(\epsilon)/\log(\rho(P))}.$$

Se
$$\boxed{R(P) = -\log(\rho(P))}$$
è la cosidetta *velocità di convergenza asintotica* del metodo iterativo relativo a P abbiamo
$$\boxed{m \approx \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log(\rho(P))} \right\rceil = \left\lceil \frac{-\log(\epsilon)}{R(P)} \right\rceil}.$$

Se P è la matrice d'iterazione di un metodo stazionario convergente (e consistente), essendo $\rho(P) < 1$, minore è $\rho(P)$ necessariamente è maggiore $R(P)$ e si può *stimare* il numero di iterazioni per ridurre l'errore di un fattore ϵ.

Si desidera quindi cercare metodi
- metodi con m minore possibile o equivalentemente
- $\rho(P)$ più piccolo possibile o equivalentemente
- con $R(P)$ il più grande possibile.

3.4. Alcuni teoremi di convergenza. DEFINIZIONE 3.5 (Matrice tridiagonale). *Una matrice A si dice tridiagonale se $A_{i,j} = 0$ qualora $|i - j| > 1$.*

ESEMPIO 3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 3.5. *Per matrici tridiagonali $A = (a_{i,j})$ con componenti diagonali non nulle, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono*

- *o entrambi convergenti*
- *o entrambi divergenti.*

La velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è il doppio di quello del metodo di Jacobi.

NOTA. 3.5. *Questo significa vuol dire che asintoticamente sono necessarie metà iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per ottenere la stessa precisione del metodo di Jacobi.*

3.5. Alcune definizioni. DEFINIZIONE 3.6 (Matrice a predominanza diagonale). *La matrice A è a predominanza diagonale (per righe) se per ogni $i = 1, \ldots, n$ risulta*

$$\boxed{|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|}$$

e per almeno un indice s si abbia

$$|a_{s,s}| > \sum_{j=1, j\neq s}^{n} |a_{s,j}|.$$

La matrice A è a predominanza diagonale per colonne se A^T a predominanza diagonale per righe.

DEFINIZIONE 3.7 (Matrice a predom. diagonale in senso stretto). *Se*

$$|a_{s,s}| > \sum_{j=1, j\neq s}^{n} |a_{s,j}|, \ s = 1, \ldots, n$$

allora la matrice A si dice a predominanza diagonale (per righe) in senso stretto.

La matrice A è a predominanza diagonale (per colonne) in senso stretto se A^T a predominanza diagonale per righe in senso stretto.

ESEMPIO 3.3. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

è a predominanza diagonale per righe (non stretta).

TEOREMA 3.6. *Sia A una matrice quadrata a predominanza diagonale per righe in senso stretto. Allora il metodo di Jacobi converge alla soluzione di $Ax = b$, qualsiasi sia il punto $x^{(0)}$ iniziale.*

TEOREMA 3.7. *Sia A è a predominanza diagonale per righe in senso stretto. Allora il metodo di Gauss-Seidel converge, qualsiasi sia il punto $x^{(0)}$ iniziale.*

- Tali teoremi valgono anche se A è a predominanza diagonale per colonne in senso stretto.
- Si basano sul teorema di convergenza dei metodi iterativi stazionari.

DEFINIZIONE 3.8 (Matrice simmetrica). *La matrice A è simmetrica se $A = A^T$.*

DEFINIZIONE 3.9 (Matrice definita positiva). *Una matrice simmetrica A è definita positiva se ha tutti gli autovalori positivi.*
Equivalentemente una matrice simmetrica A è definita positiva se

$$x^T Ax > 0, \text{ per ogni } x \neq 0.$$

ESEMPIO 3.4. *Ad esempio la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

è simmetrica e definita positiva. Per convincersene basta vedere che ha tutti gli autovalori positivi.

```
>> A=[4 -1 0; -1 4 -1; 0 -1 4];
>> eig(A) % AUTOVALORI DI A.
ans =
    2.5858
    4.0000
    5.4142
>>
```

TEOREMA 3.8 (Kahan). *Sia A una matrice quadrata. Condizione necessaria affinchè il metodo SOR converga globalmente alla soluzione di $Ax = b$ è che sia $|1 - \omega| < 1$. Se $\omega \in \mathbb{R}$ in particolare è che sia $\omega \in (0, 2)$.*

TEOREMA 3.9 (Ostrowski). *Sia A*

- *simmetrica,*
- *con elementi diagonali positivi.*

Allora il metodo SOR converge se e solo se

- $0 < \omega < 2$,
- *A è definita positiva.*

Per una dimostrazione si veda [**?**, p.215].

3.6. Test di arresto. PROBLEMA. 3.1 (Test di arresto). *Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ avente un'unica soluzione x^* e supponiamo di risolverlo numericamente con un metodo iterativo stazionario del tipo*

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c,$$

che sia consistente cioè

$$x^* = Px^* + c.$$

Desideriamo introdurre un test di arresto che interrompa le iterazioni, qualora una certa quantità relativa al sistema lineare $Ax = b$ e alle iterazioni eseguite, sia al di sotto di una tolleranza $\epsilon > 0$ fissata dall'utente.

PROPOSIZIONE. 3.1 (Stima a posteriori). *Sia $Ax = b$ con A non singolare e $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ un metodo iterativo stazionario consistente, con $\|P\| < 1$. Allora*

$$\boxed{\|e^{(k)}\| := \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{1 - \|P\|}.}$$

DIMOSTRAZIONE. 3.5. *Posto $\Delta^{(k)} := x^{(k+1)} - x^{(k)}$ e $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, essendo $e^{(k)} = Pe^{(k-1)}$ abbiamo*

$$\begin{aligned}\|e^{(k)}\| = \|x^* - x^{(k)}\| &= \|(x^* - x^{(k+1)}) + (x^{(k+1)} - x^{(k)})\| \\ &= \|e^{(k+1)} + \Delta^{(k)}\| = \|Pe^{(k)} + \Delta^{(k)}\| \leq \|P\| \cdot \|e^{(k)}\| + \|\Delta^{(k)}\|\end{aligned}$$

da cui

$$(1 - \|P\|)\|e^{(k)}\| \leq \|\Delta^{(k)}\| \Leftrightarrow \|e^{(k)}\| := \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{1 - \|P\|}.$$

△

3.7. Test di arresto: criterio dello step. Fissata dall'utente una tolleranza *tol*, si desidera interrompere il processo iterativo quando

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \text{tol}.$$

DEFINIZIONE 3.10 (Criterio dello step). *Il criterio dello step, consiste nell'interrompere il metodo iterativo che genera la successione $\{x^{(k)}\}$ alla $k+1$-sima iterazione qualora*

$$\boxed{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq tol}$$

(dove tol è una tolleranza fissata dall'utente).

Di seguito desideriamo vedere quando tale criterio risulti attendibile cioè $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \approx |x^* - x^{(k)}|$.

TEOREMA 3.10. *Sia $Ax^* = b$ con A non singolare e $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ un metodo iterativo stazionario*

- *consistente,*
- *convergente,*

- *con P simmetrica.*

Allora

$$\boxed{\|e^{(k)}\|_2 := \|x^* - x^{(k)}\|_2 \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2}{1-\rho(P)}.}$$

LEMMA 3.2. *Se P è simmetrica, allora esistono*
- *una matrice ortogonale U, cioè tale che $U^T = U^{-1}$,*
- *una matrice diagonale a coefficienti reali Λ*

per cui

$$P = U\Lambda U^T$$

ed essendo P e Λ simili, le matrici P e Λ hanno gli stessi autovalori $\{\lambda_k\}_k$.

DIMOSTRAZIONE. 3.6. *Dal lemma, se P è simmetrica, essendo*
- $\|P\|_2 := \sqrt{\rho(PP^T)}$,
- $U^TU = I$

$$\begin{aligned}\|P\|_2 &= \sqrt{\rho(PP^T)} = \sqrt{\rho(U\Lambda U^T(U\Lambda U^T)^T)} \\ &= \sqrt{\rho(U\Lambda U^TU\Lambda U^T)} = \sqrt{\rho(U\Lambda^2U^T)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Essendo $U\Lambda^2U^T$ simile a Λ^2, $U\Lambda^2U^T$ e Λ^2 hanno gli stessi autovalori uguali a $\{\lambda_k^2\}_k$ e di conseguenza lo stesso raggio spettrale, da cui

$$\rho(U\Lambda^2U^T) = \rho(\Lambda^2).$$

Da $\rho(U\Lambda^2U^T) = \rho(\Lambda^2)$ ricaviamo

$$\begin{aligned}\|P\|_2 &= \sqrt{\rho(\Lambda^2)} = \sqrt{\max_k |\lambda_k^2|} = \sqrt{\max_k |\lambda_k|^2} \\ &= \sqrt{(\max_k |\lambda_k|)^2} = \max_k |\lambda_k| = \rho(P). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se il metodo stazionario $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$ è convergente, per il teorema di convergenza $\|P\|_2 = \rho(P) < 1$ e per la precedente proposizione

$$\|e^{(k)}\|_2 := \|x^* - x^{(k)}\|_2 \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2}{1-\|P\|_2} = \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2}{1-\rho(P)}.$$

△

NOTA. 3.6. *Il teorema afferma che se la matrice di iterazione P, di un metodo consistente e convergente, è simmetrica, il criterio dello step è affidabile se $\rho(P) < 1$ è piccolo.*

3.8. Test di arresto: criterio del residuo. DEFINIZIONE 3.11 (Criterio del residuo). *Il criterio del residuo, consiste nell'interrompere il metodo iterativo che genera la successione* $\{x^{(k)}\}$ *alla* $k+1$*-sima iterazione qualora*

$$\boxed{\|r^{(k)}\| \leq tol}$$

dove

- *tol è una tolleranza fissata dall'utente,*
- $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

TEOREMA 3.11. *Sia* $Ax^* = b$ *con* A *non singolare e* $\|\cdot\|$ *una norma naturale. Sia* $\{x^{(k)}\}$ *la successione generata da un metodo iterativo. Allora*

$$\frac{\|x^{(k)} - x^*\|}{\|x^*\|} = \frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}.$$

dove $\kappa(A)$ *è il numero di condizionamento di* A.

NOTA. 3.7. *Dal teorema si evince che il criterio* $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq tol$ *non offre indicazioni su* $\frac{\|x^{(k)}-x^*\|}{\|x^*\|}$ *per* $\kappa(A) \gg 1$.

DIMOSTRAZIONE. 3.7. *Se* $b = Ax^*$ *allora, essendo* A *invertibile*

$$e^{(k)} = x^* - x^{(k)} = A^{-1}A(x^* - x^{(k)}) = A^{-1}(b - Ax^{(k)}) = A^{-1}r^{(k)}$$

e quindi, essendo $\|\cdot\|$ *una norma naturale*

$$\|e^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\|\|r^{(k)}\|;$$

Inoltre, poichè $b = Ax^*$ *abbiamo* $\|b\| \leq \|A\|\|x^*\|$ *e quindi*

$$\frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}.$$

Di conseguenza, posto $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, *se* $x^* \neq 0$ *ricaviamo*

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \cdot \|A^{-1}\|\|r^{(k)}\| = \kappa(A)\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}.$$

△

Sia *A una matrice simmetrica definita positiva.*

Si osserva che se x^* è l'unica soluzione di $Ax = b$ allora è pure il minimo del *funzionale dell'energia*

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x, \;\; x \in \mathbb{R}^n}$$

in quanto

$$\text{grad}(\phi(x)) = Ax - b = 0 \Leftrightarrow Ax = b.$$

Quindi invece di calcolare la soluzione del sistema lineare, intendiamo calcolare il minimo del funzionale ϕ.

4. I metodi di discesa. Un generico metodo di discesa consiste nel generare una successione

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}}$$

dove $p^{(k)}$ è una direzione fissata secondo qualche criterio.
Lo scopo ovviamente è che

$$\phi(x^{(k+1)}) < \phi(x^{(k)}),$$

e che il punto x^*, in cui si ha il minimo di ϕ, venga calcolato rapidamente.

DEFINIZIONE 4.1 (Metodo del gradiente classico, Cauchy 1847). *Il metodo del gradiente classico è un metodo di discesa*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

con α_k e $p^{(k)}$ scelti così da ottenere la massima riduzione del funzionale dell'energia a partire dal punto $x^{(k)}$.

Differenziando $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x,\ x \in \mathbb{R}^n$ si mostra che tale scelta coincide con lo scegliere

$$\boxed{p^{(k)} = r^{(k)}, \quad \alpha_k = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}}.} \tag{4.1}$$

NOTA. 4.1. *Con qualche facile conto si vede che è un metodo di Richardson non stazionario con $P = I$ e parametro α_k definito da (4.1).*

4.1. Il metodo del gradiente coniugato.. DEFINIZIONE 4.2 (Gradiente coniugato, Hestenes-Stiefel, 1952). *Il metodo del gradiente coniugato è un metodo di discesa*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

con

- $\alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(p^{(k)})^T A p^{(k)}}$,
- $p^{(0)} = r^{(0)}$,
- $p^{(k)} = r^{(k)} + \beta_k p^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

- $\beta_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k-1)})^T r^{(k-1)}} = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{\|r^{(k-1)}\|_2^2}$.

Con questa scelta si prova che $p^{(k)}$ e $p^{(k-1)}$ sono *A-coniugati*.

$$(p^{(k)})^T A p^{(k-1)} = 0.$$

NOTA. 4.2 (Brezinski, Wuytack). *Hestenes was working at the I.N.A. at UCLA. In June and early July 1951, he derived the conjugate gradient algorithm.*

When, in August, Stiefel arrived at I.N.A. from Switzerland for a congress, the librarian gave him the routine written by Hestenes. Shortly after, Stiefel came to Hestenes office and said about the paper "`this is my talk!`*".*

Indeed, Stiefel had invented the same algorithm from a different point of view. So they decided to write a joint paper from a different point of view.

NOTA. 4.3 (Saad, van der Vorst). *The anecdote told at the recent conference ... by Emer. Prof. M. Stein, the post-doc who programmed the algorithm for M. Hestenes the first time, is that Stiefel was visiting UCLA at the occasion of a conference in 1951. Hestenes then a faculty member at UCLA, offered to demonstrate this effective new method to Stiefel, in the evening after dinner. Steifel was impressed by the algorithm. After seeing the deck of cards he discovered that this was the same method as the one he had developed independently in Zurich. Stiefel also had an assistant, by the name of Hochstrasser, who programmed the method.*

Il metodo del gradiente coniugato ha molte proprietà particolari. Ne citiamo alcune.

TEOREMA 4.1. *Se A è una matrice simmetrica e definita positiva di ordine n, allora il metodo del gradiente coniugato è convergente e fornisce in aritmetica esatta la soluzione del sistema $Ax = b$ in al massimo n iterazioni.* Questo teorema tradisce un po' le attese, in quanto

- in generale i calcoli non sono compiuti in aritmetica esatta,
- in molti casi della modellistica matematica n risulta essere molto alto.

4.1.1. Il metodo del gradiente coniugato: proprietà . DEFINIZIONE 4.3 (Spazio di Krylov). *Lo spazio*

$$\mathcal{K}_k = span(r^{(0)}, Ar^{(0)}, \ldots, A^{k-1}r^{(0)})$$

per $k \geq 1$ si dice spazio di Krylov.

TEOREMA 4.2. *Sia*

$$\mathcal{K}_k = span(r^{(0)}, Ar^{(0)}, \ldots, A^{k-1}r^{(0)})$$

per $k \geq 1$. Allora la k-sima iterata dal metodo del gradiente coniugato, minimizza il funzionale ϕ nell'insieme $x^{(0)} + \mathcal{K}_k$.

Per una dimostrazione si veda [7, p.12]. Si osservi che essendo la k-sima iterazione del gradiente classico pure in $x^{(0)} + \mathcal{K}_k$, il gradiente classico non minimizza in generale il funzionale ϕ in $x^{(0)} + \mathcal{K}_k$.

TEOREMA 4.3. *Se*

- *A è simmetrica e definita positiva,*

- $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$,
- $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, *con* $x^{(k)}$ *iterazione del gradiente coniugato*

allora (cf. [6, p.530])

$$\boxed{\|e^{(k)}\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{K_2(A)}-1}{\sqrt{K_2(A)}+1}\right)^k \|e^{(0)}\|_A.}$$

NOTA. 4.4. *Questo risultato stabilisce che la convergenza del gradiente coniugato è lenta qualora si abbiano alti numeri di condizionamento*

$$K_2(A) := \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_j |\lambda_j|},\ \{\lambda_i\} = \textit{spettro}(A).$$

Posto

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

abbiamo ad esempio

- $\mu(10) \approx 0.5195$,
- $\mu(1000) \approx 0.9387$,
- $\mu(100000) \approx 0.9937$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
[2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, 2001.
[3] D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, 1988.
[4] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
[5] S.D. Conte e C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis, 3rd Edition*, Mc Graw-Hill, 1980.
[6] G.H. Golub, C.F. Van Loan *Matrix Computations*, third edition, The John Hopkins University Press, 1996.
[7] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, 1995.
[8] A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.