EQUAZIONE DI POISSON *

A. SOMMARIVA†

Conoscenze richieste.

Conoscenze ottenute.

1. Equazione di Poisson, caso univariato.. PROBLEMA. 1.1. *Consideriamo di seguito una sottoclasse dei problemi al contorno*

$$\boxed{\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \; x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}} \tag{1.1}$$

Supponiamo
- $[a, b]$ *sia un intervallo limitato,*
- $q \in C^{(0)}([a, b])$, $q(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$,
- $g \in C^{(0)}([a, b])$.

NOTA. 1.1. *Per una dimostrazione di esistenza, unicità e regolarità della soluzione* y, *si consulti [1, p.671].*

Consideriamo quale esempio il caso particolare di

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), \; x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{1.2}$$

cioè

$$\boxed{\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = f(x), \; x \in (a,b), \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}} \tag{1.3}$$

con
- $[a, b]$ sia un intervallo limitato,
- $c > 0$,
- $f \in C^{(0)}([a, b])$.

Questo problema si dice di Poisson univariato.

Supponiamo che la soluzione u del problema di Poisson univariato, appartenga a $C^4([a, b])$. Allora dallo sviluppo di Taylor centrato in x, abbiamo

$$y(x+h) = y(x) + hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_1),$$

$$y(x-h) = y(x) - hy^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_2),$$

---

*Ultima revisione: 22 maggio 2017

†Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@euler.math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

e quindi sommando membro a membro, dal teorema della media, per qualche $\xi \in (a, b)$,

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12} y^{(4)}(\xi),$$

da cui l'appross. della derivata seconda con le differenze centrate

$$\boxed{y^{(2)}(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.} \tag{1.4}$$

Allora, il problema di Poisson univariato, può essere discretizzato utilizzando le differenze centrate, ricavando

$$\boxed{-\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + cy(x) \approx -y^{(2)}(x) + cy(x) = f(x)}$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b).

Consideriamo ora la discretizzazione equispaziata dell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = a + ih, \ 0 \leq i \leq n + 1$$

con

$$h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Essendo, come visto,

$$\boxed{-\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + cy(x) \approx -y^{(2)}(x) + cy(x) = f(x)}$$

con $y(t) = 0$ se t non appartiene ad (a, b), riscrivendo le equazioni relativamente ai punti $x = x_i$, intendiamo approssimare $y(x_k)$ con u_k risolvente il sistema di equazioni

$$\boxed{-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + cu_k = f(x_k), \quad k = 1, \ldots, n} \tag{1.5}$$

dove $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Dopo facili conti, tali equazioni lineari possono essere riscritte come

$$\boxed{\frac{1}{h^2}(-u_{k+1} + (2 + ch^2)u_k - u_{k-1}) = f(x_k),} \tag{1.6}$$

con $u_0 = u_{n+1} = 0$, ed essere convenientemente definite matricialmente come $Au = b$, dove A è la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + ch^2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 + ch^2 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 2 + ch^2 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & -2 + ch^2 \end{pmatrix}$$

e $b_k = f(x_k)$ per $k = 1, \dots, n$.

ESEMPIO 1.1. *Vediamo un esempio, per $n = 4$, in cui i punti $x_k = x_0 + kh$ sono equispaziati e $x_0 = a$, $x_5 = b$ (cioè $h = (b-a)/5$).*

Da $u_0 = y(a) = 0$, $u_5 = y(b) = 0$, da (0.6)

$$\frac{1}{h^2}(-u_2 + (2+ch^2)u_1 - \cancel{u_0}) = f(x_1), \tag{1.7}$$
$$\frac{1}{h^2}(-u_3 + (2+ch^2)u_2 - u_1) = f(x_2), \tag{1.8}$$
$$\frac{1}{h^2}(-u_4 + (2+ch^2)u_3 - u_2) = f(x_3), \tag{1.9}$$
$$\frac{1}{h^2}(-\cancel{u_5} + (2+ch^2)u_4 - u_3) = f(x_4), \tag{1.10}$$

ricaviamo facilmente che per aver un'approssimazione $u_k \approx y(x_k)$ della soluzione dovremo risolvere il sistema $Au = b$ con $b_k = f(x_k)$.

NOTA. 1.2. *Dall'esempio precedente, si capisce che se $u_0 = y(a) = \alpha$, $u_5 = y(b) = \beta$, l'unico effetto è che $Au = b$ con $b_1 = f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2}$, $b_n = f(x_n) + \frac{\beta}{h^2}$.*

La matrice

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2+ch^2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2+ch^2 \end{pmatrix}$$

è

- simmetrica, e definita positiva (per il primo ed il terzo teorema di Gershgorin), con lo spettro degli autovalori $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$ contenuto in $[c, c+4h^{-2}]$;
- a predominanza diagonale stretta, essendo $c > 0$.

TEOREMA 1.1.

- *Se y è la soluzione di (0.3) e $u_k \approx y(x_k)$ con $x_k = a + kh$, si ha*

$$\boxed{\frac{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_2}{\sqrt{n}} = O(h^2)}$$

- *se la soluzione $y \in C^{(4)}([a,b])$, allora (cf. [1, p.678])*

$$\boxed{\|\{u_i\} - \{y(x_i)\}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24}\|y^{(4)}\|_\infty \|(x-a)(b-x)\|_\infty;}$$

- *essendo la matrice tridiagonale, il sistema lineare può essere risolto con l'eliminazione gaussiana con complessità $O(n)$.*
- *se $c = 0$, si può ancora mostrare che A è def. positiva e che per ogni h che $\sigma(A) = \{\lambda_i\} \subseteq [\delta, c+4h^{-2}]$ con $\delta > 0$ indipendente da h.*

2. Equazione di Poisson, caso bivariato.. PROBLEMA. 2.1 (Poisson bivariato). *L'equazione*

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) = g(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}} \tag{2.1}$$

dove

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.2}$$

determina il problema di Poisson bivariato, nel quadrato $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Definita la griglia di punti $\mathcal{G} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=0,\ldots,n+1}$

$$\boxed{x_i = ih, \ y_j = jh, \ h = 1/(n+1), \, i,j = 0,\ldots,n+1}$$

risulta evidente che per

- $i = 0$ o
- $j = 0$, $i = n+1$ o $j = n+1$

abbiamo un punto del bordo e quindi in virtù delle condizioni di Dirichlet in (0.11), il valore della soluzione u^* è determinato.

Vediamo cosa succede quando il punto della griglia $\mathcal{G}$ è interno al quadrato $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, caratterizzati dall'avere $i, j = 1, \ldots, n$.

Si mostra facilmente, utilizzando la formula di Taylor bivariata centrata in (x,y), in cui vengono tralasciati termini di ordine $O(h^2)$, che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &\approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &\approx \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} \end{aligned}$$

e quindi sommando le precedenti, si può approssimare $\Delta u(x,y)$ con

$$\frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)}{h^2}$$

e quindi essendo, $x_i = ih$, $y_j = jh$, si approssima $\Delta u(x_i, y_j)$ con

$$\frac{u(x_{i+1},y_j) + u(x_{i-1},y_j) + u(x_i,y_{j+1}) + u(x_i,y_{j-1}) - 4u(x_i,y_j)}{h^2}. \tag{2.3}$$

Da

$$\Delta u(x_i,y_j) \approx \frac{u(x_{i+1},y_j) + u(x_{i-1},y_j) + u(x_i,y_{j+1}) + u(x_i,y_{j-1}) - 4u(x_i,y_j)}{h^2} \tag{2.4}$$

ricaviamo la discretizzazione dell'equazione $\Delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_i)$ con

$$\boxed{u(x_{i+1},y_j) + u(x_{i-1},y_j) + u(x_i,y_{j+1}) + u(x_i,y_{j-1}) - 4u(x_i,y_j) = h^2 f(x_i,y_j),} \tag{2.5}$$

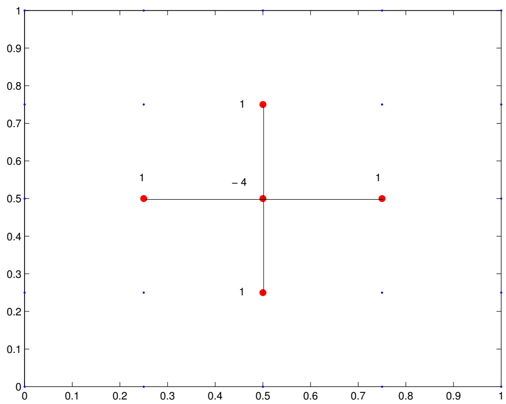

FIGURA 2.1. *La molecola della discr. del Laplaciano avente centro* $(0.5, 0.5)$ *e* $h = 0.25$. *Si ricordi di dividere ogni valore nella molecola per* h^2.

.

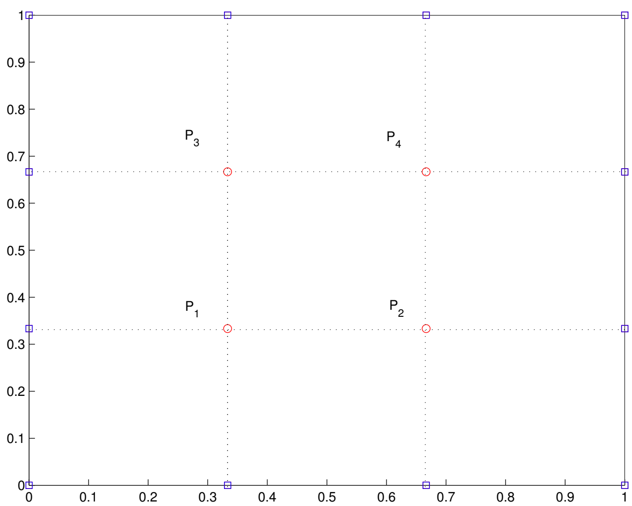

FIGURA 2.2. *Una griglia avente passo* $h = 1/3$ *relativamente al quadrato* $[0, 1] \times [0, 1]$.

.

per $i, j = 1, \ldots, n$, con le condizioni al contorno

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j),\ \ i = 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j),\ \ i = n + 1,\ j = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j),\ \ i = 1, \ldots, n,\ j = 0, j = n + 1. \tag{2.8}$$

Purtroppo, la descrizione del sistema lineare non è troppo chiara. Vediamola scritta matricialmente. Sia B la matrice $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed I la matrice identica di ordine n del tipo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

- se b è il vettore ottenuto dai contributi dei termini dovuti a f e g in (0.11) e (0.15),
- A la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots \\ I & B & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}$$

- $u_{(j-1)n+i} := u(x_i, y_j)$ (soluzione numerica nei punti della griglia immagazzinata in un vettore, seguendo un opportuno ordinamento!),

si ricava che il sistema da risolvere è $Au = b$, usando ad esempio

- il metodo di Jacobi, o
- Gauss-Seidel, SOR o
- il gradiente coniugato.

ESEMPIO 2.1. *Facciamo un esempio sulla risoluzione dell'equazione di Poisson via metodo alle differenze con 5 punti.*

Sia $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $h = 1/3$ *e siano*

$$P_{i,j} = (ih, jh),\ i, j = 0, 1, 2, 3.$$

E' chiaro che per

- *per* $i = 0$ *i punti* $P_{0,j}$ *sono sull'asse* $x = 0$ *(cioè l'asse* y*),*
- *per* $i = 3$ *i punti* $P_{3,j}$ *sono sull'asse* $x = 1$*,*
- *per* $j = 0$ *i punti* $P_{i,0}$ *sono sull'asse* $y = 0$ *(cioè l'asse* x*)*
- *per* $j = 3$ *i punti* $P_{i,3}$ *sono sull'asse* $y = 1$*.*

Date le condizioni al contorno, la soluzione in questi punti è nota ed è uguale a $u_{i,j} = g(x_i, y_j)$*. I rimanenti punti* $P_{i,j}$*, con* $i, j = 1, 2$ *sono interni a* Ω *ed è*

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \quad (2.9)$$

Analizziamo caso per caso queste equazioni:

- *Nel caso* $i = 1$, $j = 1$ *si ha*

$$u(x_2, y_1) + u(x_0, y_1) + u(x_1, y_2) + u(x_1, y_0) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1),$$

$$u(x_0, y_1) = g(x_0, y_1),\ u(x_1, y_0) = g(x_1, y_0).$$

Portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_1) + u(x_1, y_2) - 4u(x_1, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0).$$

- *Nel caso* $i = 2$, $j = 1$ *si ha*

$$u(x_3, y_1) + u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_2, y_0) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_2, y_1),$$

$$u(x_3, y_1) = g(x_3, y_1),\ u(x_2, y_0) = g(x_2, y_0)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) - 4u(x_2, y_1) = h^2 f(x_1, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0).$$

- *Nel caso* $i = 1$, $j = 2$ *si ha*

$$u(x_2, y_2) + u(x_0, y_2) + u(x_1, y_3) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_0, y_2) = g(x_0, y_2),\ u(x_1, y_3) = g(x_1, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_2, y_2) + u(x_1, y_1) - 4u(x_1, y_2) = h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3).$$

- *Nel caso* $i = 2$, $j = 2$ *si ha*

$$u(x_3, y_2) + u(x_1, y_2) + u(x_2, y_3) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2),$$

ed essendo

$$u(x_3, y_2) = g(x_3, y_2),\ u(x_2, y_3) = g(x_2, y_3)$$

portando questi due termini a secondo membro otteniamo

$$u(x_1, y_2) + u(x_2, y_1) - 4u(x_2, y_2) = h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3).$$

Poniamo ora

$$b_1 := h^2 f(x_1, y_1) - g(x_0, y_1) - g(x_1, y_0),$$

$$b_2 := h^2 f(x_2, y_1) - g(x_3, y_1) - g(x_2, y_0),$$

$$b_3 := h^2 f(x_1, y_2) - g(x_0, y_2) - g(x_1, y_3),$$

$$b_4 ;= h^2 f(x_2, y_2) - g(x_3, y_2) - g(x_2, y_3),$$

ordiniamo i punti da sinistra a destra, e dal basso verso l'alto (ordine lessicografico)

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_1),\ P_3 = (x_1, y_2),\ P_4 = (x_2, y_2),$$

e infine poniamo

$$u_1 = u(x_1, y_1),\ u_2 = u(x_2, y_1),\ u_3 = u(x_1, y_2),\ u_4 = u(x_2, y_2),$$

Otteniamo così

$$u_2 + u_3 - 4u_1 = b_1,$$

$$u_1 + u_4 - 4u_2 = b_2,$$

$$u_4 + u_1 - 4u_3 = b_3,$$

$$u_3 + u_2 - 4u_4 = b_4,$$

da cui posto

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

basta risolvere il sistema $Au = b$ *per ottenere* $u_1 = u(x_1, y_1)$, $u_2 = u(x_2, y_1)$, $u_3 = u(x_1, y_2)$, $u_4 = u(x_2, y_2)$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.