POLINOMI ORTOGONALI *

A. SOMMARIVA†

Conoscenze richieste. Integrazione di funzioni. Funzioni quadrato integrabili. Calcolo dellelemento di miglior approssimazione in spazi euclidei. Condizionamento di una matrice. Polinomi.

Conoscenze ottenute. Problema ai minimi quadrati (nel continuo). Funzione peso. Soluzione analitica del problema ai minimi quadrati (rispetto una funzione peso). Matrice di Hilbert. Problema ai minimi quadrati (nel continuo) e polinomi ortogonali. Proprietà delle radici dei polinomi ortogonali.

1. Il problema ai minimi quadrati. Cominciamo la nostra analisi dalla definizione di spazio di Hilbert.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio di Hilbert). *Uno spazio di Hilbert è uno spazio euclideo che è*

- *completo,*
- *separabile,*
- *infinito dimensionale (cf. [6, p.155]).*

NOTA. 1.1. *Al variare del testo la definizione di spazio di Hilbert può essere leggermente diversa, ad esempio uno spazio di Hilbert è uno spazio euclideo completo (cf. [2]).*

ESEMPIO 1.1. *Consideriamo lo spazio normato delle funzioni reali misurabili (cf. [6, p.284]) quadrato integrabili $(L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$ dove (a,b) è un intervallo della retta reale, non necessariamente limitato (cf. [6, p.386], ricordando [6, p.308]), e*

$$\|g\|_2^2 = (g,g), \quad (f,g)_2 = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Si dimostra (non facile!) che questo spazio euclideo è un esempio di spazio di Hilbert (cf. [6, p.388]).

ESEMPIO 1.2. *Più in generale se $w : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile positiva allora lo spazio $(L_w^2(a,b), \|\cdot\|_{2,w})$ definito come*

$$L_w^2(a,b) = \left\{ f \text{ misurabili t.c. } \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty \right\}$$

è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare

$$(f,g)_{2,w} = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, w(x)\, dx$$

(cf. [2, p.23]).

DEFINIZIONE 1.2 (Funzione peso). *Supponiamo sia $w : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

*Ultima revisione: 14 marzo 2017

†Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

- *w è nonnegativa, con (a, b) non necessariamente limitato,*
- *$\int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx < +\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$;*
- *$\int_a^b g(x)\, w(x)\, dx = 0$ per qualche funzione continua e non negativa g implica $g \equiv 0$ in (a, b).*

Una tal w si dice funzione peso.

Esempio 1.3. *Le funzioni peso più comuni sono (cf. [1, p.206])*

1. *$w(x) = 1$ con $x \in [-1, 1]$ (peso di Legendre);*
2. *$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x \in (-1, 1)$ (peso di Chebyshev));*
3. *$w(x) = (1 - x^2)^{\gamma-(1/2)}$ con $x \in (-1, 1)$, $\gamma > (-1/2)$ (peso di Gegenbauer));*
4. *$w(x) = (1-x)^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta}$ con $x \in (-1, 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ (peso di Jacobi));*
5. *$w(x) = \exp(-x)$ con $x \in (0, +\infty)$ (peso di Laguerre));*
6. *$w(x) = \exp(-x^2)$ con $x \in (-\infty, +\infty)$ (peso di Hermite);*

Teorema 1.1. *Lo spazio vettoriale $L^2_w(a, b)$ contiene lo spazio dei polinomi $\mathcal{P}_n$ di grado n (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario).*

Dimostrazione. Infatti, se $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ allora per la disuguaglianza triangolare e il fatto che per ogni k si ha

$$\|x^k\|^2_{2,w} = \int_a^b |x|^{2k}\, w(x)\, dx < +\infty$$

necessariamente

$$\|p_n\|_{2,w} = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\|_{2,w} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|x^k\|_{2,w} < +\infty,$$

e quindi $p_n \in L^2_w(a, b)$. □

Nota. 1.2. *Si osservi che se "a" e "b" sono finiti, dal teorema di Weierstrass*

$$\|x^n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |x|^n < +\infty$$

ricordando che $w \geq 0$,

$$\int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx \leq \|x^n\|_\infty \int_a^b w(x)\, dx$$

da cui se

$$\int_a^b w(x)\, dx < +\infty$$

automaticamente, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx < +\infty.$$

Problema. 1.1. *Fissati*

- $f \in L^2_w([a,b])$,
- $n \in \mathbb{N}$,

il problema ai minimi quadrati (nel continuo) consiste nel determinare il polinomio p_n di grado n tale che sia minima la quantità (cf. [1, p.204-207])

$$\|f - p_n\|_{2,w} = \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 \, w(x) \, dx.$$

Essendo $L^2_w([a,b])$ uno spazio euclideo, e $(\phi_k)_{k=0,\ldots,n}$ una base di $\mathcal{P}_n$, abbiamo visto che la soluzione del problema

$$\|f - f^*\|_{2,w} = \min_{g \in \mathrm{span}\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}} \|f - g\|_{2,w}$$

è $f^* = \sum_{j=0}^n \gamma_j^* \phi_j$ dove i coefficienti γ_j^* verificano le cosidette equazioni normali

$$\sum_{k=0}^n (\phi_j, \phi_k)_{2,w} \gamma_k^* = (\phi_j, f)_{2,w}, \ j = 0, \ldots, n.$$

La soluzione è caratterizzata dalla proprietà di ortogonalità cioè che $f^* - f$ è ortogonale a tutti gli ϕ_k, con $k = 1, \ldots, n$, ovvero

$$(f, \phi_k)_{2,w} = (f^*, \phi_k)_{2,w}, \ k = 0, \ldots, n$$

Definizione 1.3 (Polinomi ortogonali). *Una tal famiglia triangolare di polinomi $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,n}$ (cioè tale che $deg(\phi_k) = k$) si dice ortogonale rispetto alla funzione peso w nell'intervallo di riferimento se e solo se*

$$(\phi_i, \phi_j)_{2,w} = c_i \, \delta_{i,j}$$

con

- *$\delta_{i,j}$ il delta di Kronecker,*
- *$c_i > 0$, $i, j = 0, \ldots, n$.*

Si può dimostrare

- usando la procedura di Gram-Schmidt che una tal famiglia triangolare di polinomi esiste e con la stessa procedura costruirla direttamente;
- inoltre è immediato osservare che ogni polinomio di grado n si può scrivere univocamente come combinazione lineare di $\phi_0, \ldots, \phi_n$.

Di conseguenza se $p_n = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k$, allora per la bilinearità del prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_{2,w}$

$$(\phi_{n+1}, p_n)_{2,w} = (\phi_{n+1}, \sum_{k=0}^n a_k \phi_k)_{2,w} = \sum_{k=0}^n a_k (\phi_{n+1}, \phi_k)_{2,w} = 0.$$

Inoltre (cf. [4, p.978], [1, p.213])

Teorema 1.2 (Zeri di polinomi ortogonali). *Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\ldots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in (a,b) rispetto ad una funzione peso "w". Allora gli zeri del polinomio ortogonale ϕ_n*

- *sono esattamente n,*
- *hanno molteplicità 1,*
- *appartengono all'intervallo aperto (a, b).*

DIMOSTRAZIONE. 1.1. *Siano $x_1, \ldots, x_m$ (con $m \leq n$) tutti e soli gli zeri di ϕ_n interni ad (a, b) con molteplicità rispettivamente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

Di conseguenza, per qualche numero a_n abbiamo

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

avendo supposto $\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \equiv 1$ se non ci sono zeri interni ad (a, b).

Il polinomio r per costruzione non ha zeri in (a, b) e quindi non si annulla mai ed essendo una funzione continua ha segno costante.

Da $x_1, \ldots, x_m$ nodi in (a, b) e $x_{m+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \backslash (a, b)$ e

$$\phi_n(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} \right) r(x)$$

si evince che

$$r(x) = \prod_{k=m+1}^{N} (x - x_k)$$

ha segno costante in (a, b). Infatti

- *se $x \in \mathbb{R} \backslash (a, b)$ allora $x - x_j$ con $j \in \{m + 1, \ldots, N\}$ ha banalmente segno costante in (a, b);*
- *se $x_j = s + it$ con $t \neq 0$, allora pure il coniugio è uno zero di ϕ_n, diciamo $x_{j+1} = s - it$ e quindi offrono il contributo*

$$(x - x_j)(x - x_{j+1}) = (x - (s + it))(x - (s - it)) = x^2 - sx - (s^2 + t^2)$$

che avendo discriminante $\Delta < 0$, ha segno costante in (a, b).

Consideriamo il polinomio

$$q(x) = \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{mod_2(\alpha_k)} \right).$$

- *Se uno zero di ϕ_n ha molteplicità dispari ma maggiore di 1 o uno almeno ha molteplicità pari o esiste uno zero complesso non in (a, b), è facile osservare che il grado di q è minore di n.*
- *Qualsiasi sia un numero naturale, $\alpha_k + mod_2(\alpha_k)$ è un numero pari.*

Poichè

$$\phi_n(x) q(x) = a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k + mod_2(\alpha_k)} \right) r(x)$$

- *ha segno costante e grado almeno n,*
- *non coincide col polinomio nullo,*

abbiamo una contraddizione in quanto se per assurdo $q \in \mathbb{P}_{n-1}$

$$\begin{aligned} 0 = (\phi_n, q) &= \int_a^b \phi_n(x)\, q(x)\, w(x)\, dx \\ &= \int_a^b \left(a_n \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k} r(x) \right) \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{mod_2(\alpha_k)}\, w(x)\, dx \\ &= \int_a^b a_n \left(\prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k + mod_2(\alpha_k)} \right) r(x) q(x)\, w(x)\, dx \neq 0. \end{aligned}$$

Nota. 1.3.
Potrebbe venire il dubbio su perchè qualche zero non possa essere "a" o "b".

Nella dimostrazione avrebbe quale unico effetto che r si annulla in "a" o "b", rimanendo di segno costante in (a, b).
La conclusione è che il polinomio ortogonale p_n ha n radici distinte e semplici, interne ad (a, b).

Teorema 1.3 (Ricorsione a 3 termini). *Sia $\{\phi_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia triangolare di polinomi ortogonali in $[a, b]$ rispetto ad una funzione peso w. Allora per $n \geq 1$*

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n (x - \beta_n) \phi_n(x) - \gamma_n \phi_{n-1}(x)$$

dove, detto a_n il coefficiente di grado massimo di ϕ_n, si ha

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1.1}$$

$$\beta_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_n, \phi_n)_{2,w}} \tag{1.2}$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n (x\phi_{n-1}, \phi_n)_{2,w}}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})_{2,w}} \tag{1.3}$$

Nota. 1.4. *Notiamo che*

- *scelti i polinomi ortogonali ϕ_0 e ϕ_1, la procedura determina la famiglia triangolare di polinomi ortogonali di grado superiore, non appena sono disponibili i coefficienti α_k, β_k, γ_k.*
- *Se ϕ_n è tale che (ϕ_n, ϕ_k)= 0 per $k = 0, \dots, n-1$ allora per $\tau \neq 0$ pure $\tilde{\phi}_n = \tau \phi_n$ è tale che*

  $$(\tilde{\phi}_n, \phi_k) = (\tau \phi_n, \phi_k) = \tau (\phi_n, \phi_k) = 0,\ k = 0, \dots, n-1$$

  e quindi potrebbe essere considerato quale polinomio ortogonale di grado n.

Nota. 1.5. *In pratica spesso si sceglie*

- $\alpha_n = 1$,

- *i polinomi* $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - \int_a^b xw(x)dx / \int_a^b w(x)dx$

cosicchè i polinomi ortogonali siano monici *cioè con coefficiente di grado massimo uguale a 1.*

In molti altri casi, come nelle routines Matlab di W. Gautschi, si pone

- $p_{-1}(x) = 0$,
- $p_0(x) = 1$,

e quindi si applica la formula ricorsiva con $\alpha_k = 1$ *per* $k > 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, (1989).
[2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, (2001).
[3] D. Bini, M. Capovani e O. Menchi , *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, (1993).
[4] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, (1990).
[5] G. Dahlquist e A. Bjorck , *Numerical methods*, Dover, (2003).
[6] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover publications, 1970.