

QUADRATURA NUMERICA *

A. SOMMARIVA[†]

Conoscenze richieste. Integrale di Riemann. Teorema di Weierstrass. Polinomi di Lagrange. Derivate di ordine superiore. Operatori lineari limitati. Teorema di Weierstrass sulla densità di uno spazio polinomiale rispetto $C([a, b])$ con $[a, b]$ chiuso. Programmazione in Matlab/Octave.

Conoscenze ottenute. Formule di quadratura. Grado di precisione. Formule interpolatorie. Formule di Newton-Cotes. Regola del trapezio e di Simpson. Formule composte. Errore di alcune formule di quadratura. Formule a pesi positivi. Errore formule di quadratura di Newton-Cotes. Errore formule di quadratura di Gauss. Stabilità di una formula di quadratura. Teorema di Polya-Steklov.

1. Quadratura numerica. PROBLEMA. 1.1. *Un classico problema dell'analisi numerica è quello di calcolare l'integrale definito di una funzione f in un intervallo avente estremi di integrazione a, b (non necessariamente finiti) cioè*

$$I_w(f) := I_w(f, a, b) = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

dove w è una funzione peso in (a, b) [1, p.206, p.270].

La nostra intenzione è di approssimare $I(f)$ come

$$I_w(f) \approx Q_N(f) := \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (1.1)$$

I termini w_i e $x_i \in [\alpha, \beta]$ sono detti rispettivamente pesi e nodi.

Siano

- (a, b) l'intervallo di integrazione (non necessariamente limitato),
- $x_1, \dots, x_N$ un insieme di N punti a due a due distinti,
- $f \in C([a, b])$ una funzione w -integrabile cioè per cui esista finito $I_w(f)$.

NOTA. 1.1. *Se l'intervallo è limitato, per il teorema di Weierstrass e l'integrabilità della funzione peso, questo è vero per qualsiasi **funzione continua** in quanto*

$$\left| \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| w(x) dx \leq \|f\|_\infty \|w\|_1 < +\infty.$$

Se

$$p_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x)$$

*Ultima revisione: 20 marzo 2017

[†]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova, stanza 419, via Trieste 63, 35121 Padova, Italia (alvise@math.unipd.it). Telefono: +39-049-8271350.

è il polinomio che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1, \dots, N$, dove al solito L_i indica l' i -esimo polinomio di Lagrange allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &\approx \int_a^b p_{N-1}(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x_i)L_i(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b L_i(x)w(x)dx \right) f(x_i) \end{aligned} \quad (1.2)$$

per cui, confrontando con la formula (1.1) abbiamo

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

In virtù di quanto detto appare naturale la seguente

DEFINIZIONE 1.1 (Formula interpolatoria (Lagrange, 1795)). *Una formula di quadratura*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (1.3)$$

per cui

$$w_k = \int_a^b L_k(x)w(x)dx, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

si dice **interpolatoria**.

DEFINIZIONE 1.2 (Grado di precisione). *Una formula*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^M w_i f(x_i)$$

ha **grado di precisione** almeno N se e solo se è esatta per tutti i polinomi f di grado inferiore o uguale a N .

Ha inoltre grado di precisione N se e solo se è esatta per ogni polinomio di grado N ed esiste un polinomio di grado $N + 1$ per cui non lo sia.

Mostriamo ora il seguente

TEOREMA 1.1. *Una formula*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

è interpolatoria se e solo se ha grado di precisione almeno $N - 1$.

DIMOSTRAZIONE. 1.1 (Facoltativo). $\Rightarrow$ Se la formula è interp., $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ con

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se $f = p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ allora $p_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) L_i(x)$.
 Da $p_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) L_i(x)$, allora

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{n-1}(x) w(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) L_i(x) w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n p_{n-1}(x_i) \int_a^b L_i(x) w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i p_{n-1}(x_i), \end{aligned} \quad (1.5)$$

e quindi la formula ha grado di precisione $n - 1$.

$\Leftarrow$ Viceversa se è esatta per ogni polinomio di grado $N - 1$ allora lo è in particolare per i polinomi di Lagrange $L_i \in \mathbb{P}_{n-1}$, il che implica che $w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx$ e quindi i pesi sono proprio quelli della formula interpolatoria corrispondente nei nodi $x_1, \dots, x_N$.

NOTA. 1.2. Osserviamo che il precedente teorema dice che una formula di quadratura a N punti ha grado di precisione $N - 1$ se e solo se i pesi sono del tipo

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx, \quad i = 1, \dots, N$$

dove al solito

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$$

è l' i -esimo polinomio di Lagrange.

2. Formule di Newton-Cotes. DEFINIZIONE 2.1 (Formule di Newton-Cotes (chiuse), (Newton 1676, Cotes 1722)). Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Una formula $S_N(f) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$ tale che $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$ si dice di tipo Newton-Cotes chiusa (cf. [4, p.336]) se

- i nodi sono equispaziati, cioè

$$x_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{N-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

- i pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$$

e quindi la formula è interpolatoria e ha grado di precisione almeno $N - 1$. Vediamo alcune formule di Newton-Cotes (chiuse).

DEFINIZIONE 2.2 (Regola del trapezio). La formula

$$I(f) \approx S_1(f) := S_1(f, a, b) := \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}$$

si chiama regola del trapezio. Si dimostra che

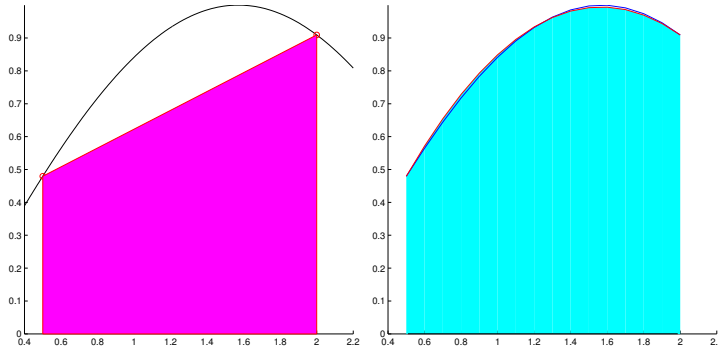


FIGURA 2.1. Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

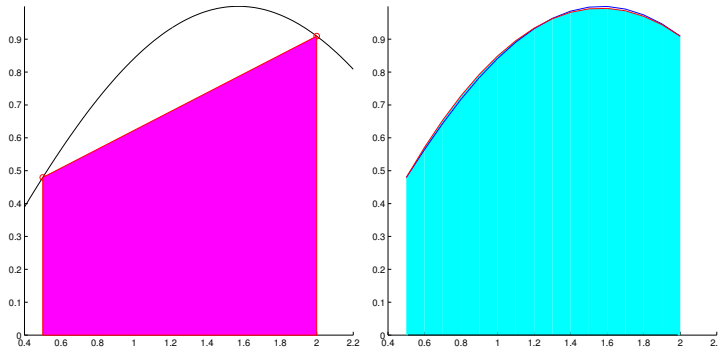


FIGURA 2.2. Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

- l'errore compiuto è

$$E_1(f) := I(f) - S_1(f) = \frac{-h^3}{12} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (2.1)$$

- da (2.1), si vede che il suo grado di precisione è 1 in quanto
 - se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
 - se $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) \neq 0$.

DEFINIZIONE 2.3 (Regola di Cavalieri-Simpson (Cavalieri 1635, Simpson 1743)).
La formula

$$I(f) \approx S_3(f) := S_3(f, a, b) := \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

si chiama regola di Cavalieri-Simpson.

Si dimostra che

- l'errore compiuto è

$$E_3(f) := I(f) - S_3(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad \xi \in (a, b)$$

- il grado di precisione è 3 (e non 2 come previsto!) in quanto
 - se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$ e quindi la formula è esatta,
 - se $f \in \mathbb{P}_4 \setminus \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) \neq 0$.

FACOLTATIVO. 2.1. Vediamo calcolando i pesi, che in effetti le due formule sono interpolatorie.

- Regola del trapezio. Posti $x_1 = a$, $x_2 = b$ abbiamo che

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad L_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

e quindi visto che $w \equiv 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{a-b} \int_a^b (x-b) dx \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{a-b} \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{-(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_a^b L_2(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

FACOLTATIVO. 2.2.

- Cavalieri-Simpson. I ragionamenti sono analoghi. D'altra parte essendo quelle dei trapezi e Simpson regole rispettivamente aventi 2 e 3 punti con grado 2 e 4, allora sono entrambe interpolatorie.

Per ulteriori dettagli si confronti [1, p.252-258], [4, p.333-336].

- Qualora le funzioni da integrare non siano sufficientemente derivabili, una stima dell'errore viene fornita dalle formule dell'errore via **nucleo di Peano** ([1, p.259]).
- Ricordiamo che per $N \geq 8$ le formule di Newton-Cotes chiuse hanno pesi di segno diverso e sono **instabili** dal punto di vista della propagazione degli errori (cf. [3, p.196]).

3. Formule di Newton-Cotes composte. Visto che per $N \geq 8$ le formule risultano instabili, ci si domanda se sia possibile ottenere per $N \geq 8$ delle formule stabili.

DEFINIZIONE 3.1 (Formule composte). Si suddivide l'intervallo (chiuso e limitato) $[a, b]$ in N subintervalli $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ tali che $x_j = a + jh$ con $h = (b-a)/N$. Dalle proprietà dell'integrale

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} S(f, x_j, x_{j+1}) \quad (3.1)$$

dove S è una delle regole di quadratura finora esposte (ad esempio $S_3(f)$). Le formule descritte in (3.1) sono dette **composte**.

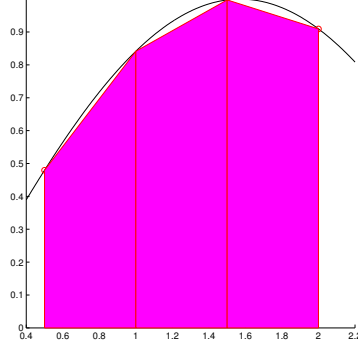


FIGURA 3.1. Formula dei trapezi composta per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (area in magenta).

3.1. Formule di Newton-Cotes composte: trapezi composta. Vediamo due casi particolari.

DEFINIZIONE 3.2 (Formula dei trapezi). Siano $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$ con $h = (b - a)/N$. La formula

$$S_1^{(c)}(f, N) := \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right] \quad (3.2)$$

si chiama dei trapezi (o del trapezio composta).

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_1^{(c)}(f) := I(f) - S_1^{(c)}(f, N) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi), \quad h = \frac{(b-a)}{N}.$$

- il grado di precisione è 1, ma relativamente alla Regola del trapezio, per $N \geq 1$, il passo h è minore.

Sotto certe ipotesi, la stima $E_1^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^2}$ è conservativa.

TEOREMA 3.1 (Formula di Eulero-Mac Laurin). Se l'integranda $f \in C^{2M+2}([a, b])$ allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= S_1^{(c)}(f, N) - \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \\ &\quad - \frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

dove B_k sono i numeri di Bernoulli (Bernoulli, 1713).

Se $f \in C^{2M+2}([a, b])$ e $f^{(2k-1)}(b) = f^{(2k-1)}(a)$, per $k = 1, \dots, M$

$$\int_a^b f(x) dx - S_1^{(c)}(f, N) = -\frac{B_{2M+2}}{(2M+2)!} h^{(2M+2)} (b-a) f^{(2M+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

e deduciamo che $E_1^{(c)}(f) \approx \frac{C}{N^{2M+2}}$.

In realtà l'errore può perfino decrescere più rapidamente.

TEOREMA 3.2. Si supponga $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sia

- periodica con periodo 2π ,
- analitica,
- soddisfi $|f(z)| \leq M$ nel semipiano $\text{Im}(z) > -a$, $a > 0$.

Allora per ogni $N \geq 1$

$$|I_N(f) - I(f)| \leq \frac{2\pi M}{e^{aN} - 1}$$

e la costante 2π è la più piccola possibile.

3.2. Formule di Newton-Cotes composte: Cavalieri-Simpson composta.

DEFINIZIONE 3.3 (Formula di Cavalieri-Simpson composta). Fissati N subintervalli, sia $h = \frac{b-a}{N}$. Siano inoltre $x_k = a + kh/2$, $k = 0, \dots, 2N$. La formula

$$I(f) \approx S_3^{(c)}(f, N) := \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2N}) \right] \quad (3.3)$$

è nota come di Cavalieri-Simpson composta.

- Si mostra che l'errore compiuto è per un certo $\xi \in (a, b)$

$$E_3^{(c)}(f) := I(f) - S_3^{(c)}(f, N) = \frac{-(b-a)}{180} \left(\frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

- il grado di precisione è 3, ma relativamente alla regola di Cavalieri-Simpson, per $N \geq 1$, il passo h è minore.

4. Formule gaussiane. PROBLEMA. 4.1. Nelle formule interpolatorie di Newton-Cotes (come ad esempio la regola del Trapezio o di Cavalieri-Simpson)

- i nodi $x_1, \dots, x_n$ sono equispaziati,
- il grado di precisione δ è generalmente uguale almeno a $n-1$ ma in alcuni casi, come per la regola di Cavalieri-Simpson, uguale al numero di nodi n .

Consideriamo ora formule

- valide anche su intervalli (a, b) non necessariamente limitati,
- valide per certe funzioni peso $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,
- che a parità di nodi hanno grado di precisione maggiore.

DEFINIZIONE 4.1 (Funzione peso). Una funzione $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (non necessariamente limitato) si dice funzione peso, se (cf. [1, p.206, p.270])

1. w è nonnegativa in (a, b) ;
2. esiste ed è finito

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$;

3. se

$$\int_a^b g(x) w(x) dx$$

per una qualche funzione nonnegativa g allora $g \equiv 0$ in (a, b) .

Tra gli esempi più noti ricordiamo

1. Legendre (scoperti nel 1785): $w(x) \equiv 1$ in $[a, b]$ limitato;
2. Jacobi (scoperti nel 1834): $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ in $(-1, 1)$ per $\alpha, \beta \geq -1$;
3. Chebyshev (scoperti nel 1853): $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(-1, 1)$;
4. Laguerre (scoperti nel 1879): $w(x) = \exp(-x)$ in $[0, \infty)$;
5. Hermite (scoperti nel 1864): $w(x) = \exp(-x^2)$ in $(-\infty, \infty)$;

NOTA. 4.1. I polinomi di Hermite erano già parzialmente noti a Laplace (1810).

Si supponga ora di dover calcolare per qualche funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x) dx.$$

Il problema è evidentemente più generale di quello di calcolare un integrale del tipo $\int_a^b f(x)dx$ con $f \in C([a, b])$, $[a, b]$ limitato, visto che

- l'integranda fw non è necessariamente continua in $[a, b]$ (si consideri ad esempio il peso di Chebyshev che ha una singolarità in $a = -1$, $b = 1$)
- oppure può succedere che l'intervallo sia illimitato come nel caso del peso di Laguerre o Hermite.

PROBLEMA. 4.2. Esistono nodi $x_1, \dots, x_n$ e pesi $w_1, \dots, w_n$ (detti di Gauss-nome funzione peso) per cui le relative formule di quadratura di tipo interpolatorio abbiano grado di precisione $\delta = 2n - 1$, cioè calcolino esattamente

$$\int_a^b p(x)w(x) dx$$

per ogni polinomio p il cui grado è minore o uguale a $2n - 1$?

La risposta è affermativa, come si può vedere in [1, p.272].

TEOREMA 4.1 (Esistenza e unicità delle formule gaussiane (Jacobi, 1826)). Per ogni $n \geq 1$ esistono e sono unici dei nodi $x_1, \dots, x_n$ e pesi $w_1, \dots, w_n$ per cui il grado di precisione sia almeno $2n - 1$.

I nodi sono gli zeri del polinomio ortogonale di grado n ,

$$\phi_n(x) = A_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

e i corrispettivi pesi sono

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx = \int_a^b L_i^2(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. 4.1 ([3, p.209]). Per prima cosa mostriamo che in effetti con tale scelta dei nodi la formula interpolatoria ha grado di precisione almeno $2n - 1$, che i pesi sono univocamente determinati e positivi.

Siano $p_{2n-1} \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e $q_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ tali che

$$p_{2n-1} = q_{n-1}\phi_n + r_{n-1}.$$

- $\int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx = (q_{n-1}, \phi_n)_w = 0$, poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale rispetto w di grado n ; infatti essendo

$$(\phi_k, \phi_n)_w = 0, \quad k = 0 < n$$

necessariamente da $q_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k$ abbiamo

$$(q_{n-1}, \phi_n)_w = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \phi_k, \phi_n \right)_w = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\phi_k, \phi_n)_w = 0$$

- la formula è interpolatoria per costruzione (vedere la definizione dei pesi!), per cui esatta per ogni polinomio di grado $n-1$ in quanto basata su n punti a due a due distinti;
- se x_k è uno zero di ϕ_n allora

$$p_{2n-1}(x_k) = q_{n-1}(x_k)\phi_n(x_k) + r_{n-1}(x_k) = r_{n-1}(x_k).$$

Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{2n-1}(x)w(x)dx &= \int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n(x)w(x)dx + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx \\ &= 0 + \int_a^b r_{n-1}(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k r_{n-1}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n w_k p_{2n-1}(x_k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

per cui tale formula ha grado di precisione almeno $2n-1$.

DIMOSTRAZIONE. 4.2. *Inoltre, come dimostrato da Stieltjes nel 1884, i pesi*

$$w_i = \int_a^b L_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n$$

sono positivi.

Infatti la formula è esatta per ognuno dei quadrati dei polinomi di Lagrange relativo ai punti $x_1, \dots, x_n$ in quanto

- $\deg(L_i^2) = 2(n-1)$,
- *la formula ha grado di precisione almeno $2n-1$, per cui, per ogni $j = 1, \dots, n$,*

$$0 < \int_a^b L_j^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k L_j^2(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{j,k} = w_j.$$

Se esistesse un'altra formula interpolatoria con grado di precisione almeno $2n-1$ e avesse

- nodi $\{\tilde{x}_j\}_{j=1, \dots, n}$,
- pesi $\{\tilde{w}_j\}_{j=1, \dots, n}$,

per prima cosa i pesi sarebbero positivi poichè il grado di precisione è almeno $2n - 1$ e quindi sarebbe esatta per il j -simo polinomio di Lagrange $\tilde{L}_j$ da cui

$$0 < \int_a^b \tilde{L}_j^2(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j^2(\tilde{x}_k) = \tilde{w}_j,$$

per $j = 1, \dots, n$.

D'altra parte se $\tilde{L}_j$ è il j -simo polinomio di Lagrange (avente grado $n - 1$), poichè ϕ_n è il polinomio ortogonale di grado n rispetto al peso w , e $\tilde{w}_j > 0$ abbiamo che da

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_n, \tilde{L}_j)_w = \int_a^b \phi_n(x) \tilde{L}_j(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k \tilde{L}_j(\tilde{x}_k) \phi_n(\tilde{x}_k) \\ &= \tilde{w}_j \cdot \phi_n(\tilde{x}_j) \end{aligned} \quad (4.2)$$

necessariamente $x_j = \tilde{x}_j$ e visto che questo implica $L_j = \tilde{L}_j$ ricaviamo anche

$$w_j = \int_a^b L_j^2(x)w(x)dx = \int_a^b \tilde{L}_j^2(x)w(x)dx = \tilde{w}_j$$

per cui la formula gaussiana cercata è unica. $\triangle$

5. Sull'errore di quadratura delle formule di Newton-Cotes e di Gauss.

FACOLTATIVO. 5.1. *Riguardo gli errori compiuti da alcune formule di quadratura.*

TEOREMA 5.1 ([1], p. 264). *Sia la regola di Newton-Cotes $I(f) \approx I_n(f) = \sum_{i=0}^n w_{i,n} f(x_{i,n})$.*

- *se n è pari e $f \in C^{(n+2)}([a, b])$ allora*

$$I(f) - I_n(f) = \mathbf{C}_n \mathbf{h}^{n+3} \mathbf{f}^{(n+2)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

con

$$C_n = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n \mu^2(\mu-1) \dots (\mu-n) d\mu;$$

- *se n è dispari e $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ allora*

$$I(f) - I_n(f) = \mathbf{C}_n \mathbf{h}^{n+2} \mathbf{f}^{(n+1)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

con

$$C_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n \mu(\mu-1) \dots (\mu-n) d\mu;$$

Si osserva facilmente che quanto visto in precedenza per la regola del trapezio e la regola di Cavalieri-Simpson, è consistente con questi due teoremi.

Per quanto concerne l'errore compiuto dalle formule gaussiane,

TEOREMA 5.2 (Markov?, [1], p. 272). *Sia $f \in C^{(2n)}(a, b)$ con (a, b) limitato e supponiamo*

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \approx I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_{i,n} f(x_{i,n})$$

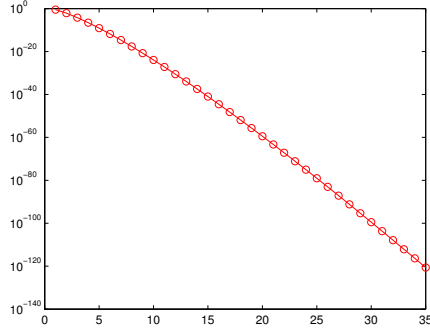


FIGURA 5.1. Grafico in scala semilogaritmica della funzione $\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}$.

sia una formula gaussiana rispetto alla funzione peso w . Allora

$$E_n(f) := I_w(f) - I_n(f) = \frac{\gamma_n}{A_n^2 (2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

dove A_n è il coefficiente di grado massimo del polinomio ortogonale ϕ_n di grado n , $\gamma_n = \int_a^b \phi_n(x) w(x) dx$. In particolare, se $w \equiv 1$, $[a, b] \equiv [-1, 1]$ allora

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1).$$

6. Stabilità di una formula di quadratura. PROBLEMA. 6.1. Sia

- (a, b) un intervallo non necessariamente limitato,
- w una funzione peso in (a, b) .

Inoltre supponiamo

- posto $f_j = f(x_j)$ sia

$$I_w(f) := \int_a^b f(x) w(x) dx \approx S(f) := \sum_{j=1}^n w_j f_j, \quad (6.1)$$

- invece di $\{f_j\}_j$ si disponga di una loro approssimazione $\{\tilde{f}_j\}_j$.

Ci si chiede come cambia il valore dell'integrale, valutando invece

$$I_w(f) := \int_a^b f(x) w(x) dx \approx \tilde{S}_n(f) := \sum_{j=1}^n w_j \tilde{f}_j. \quad (6.2)$$

Da

$$S(f) = \sum_{j=1}^n w_j f_j, \quad \tilde{S}(f) = \sum_{j=1}^n w_j \tilde{f}_j,$$

ricaviamo per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |S(f) - \tilde{S}(f)| &= \left| \sum_{j=1}^{\eta} w_j (f_j - \tilde{f}_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| |f_j - \tilde{f}_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j - \tilde{f}_j|. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Quindi la quantità

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$$

è un **indice di stabilità** della formula di quadratura S .

- Se la formula ha grado di precisione almeno 0 allora

$$\int_a^b w(x) dx = \int_a^b 1 \cdot w(x) dx = \sum_{j=1}^{\eta} w_j.$$

- Si ha $\sum_{j=1}^{\eta} w_j \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$ con la disuguaglianza stretta se e solo se qualche peso w_j è negativo.

Di conseguenza,

$$\int_a^b w(x) dx = \sum_{j=1}^{\eta} w_j \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$$

con la disuguaglianza stretta se qualche peso w_j è negativo. Quindi la presenza di pesi negativi peggiora l'indice di stabilità $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$, mentre se sono tutti positivi

$$\int_a^b w(x) dx = \sum_{j=1}^{\eta} |w_j|.$$

7. Alcune norme di operatori. PROPOSIZIONE. 7.1. Se (a, b) è limitato allora l'operatore $S : (C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{R}$, definito da

$$S(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j.$$

è lineare e continuo ed ha norma $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.

NOTA. 7.1. Questo teorema dice che l'indice di stabilità corrisponde alla norma

$$\|S\|_{\infty} = \max_{f \in C([a, b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_{\infty}}$$

dell'operatore S .

DIMOSTRAZIONE. 7.1.

Per il teorema di Weierstrass esiste $\|f\|_\infty$ ed è

$$|S(f)| = \left| \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| |f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \max_j |f_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \|f\|_\infty$$

e quindi I_n è lineare e continuo con norma minore o uguale a

$$\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|.$$

In particolare, scegliendo opportunamente f si prova che la norma dell'operatore di quadratura

$$\|S\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|S(f)|}{\|f\|_\infty}$$

coincide con $\sum_{j=1}^{\eta} |w_j|$.

△

PROPOSIZIONE. 7.2. Se (a, b) è limitato

$$\|I\|_\infty = \max_{f \in C([a,b]), f \neq 0} \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty} = \int_a^b w(x) dx = \|w\|_1.$$

DIMOSTRAZIONE. 7.2. Da

$$\begin{aligned} |I(f)| &= \left| \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |w(x)| dx \\ &\leq \int_a^b w(x) dx \cdot \|f\|_\infty = \|w\|_1 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

e $|I(1)| = \|w\|_1$, deduciamo che $\|I\|_\infty = \|w\|_1$.

8. Teorema di Stieltjes: legame tra errore di quadratura e miglior approssimazione polinomiale. TEOREMA 8.1 (Stieltjes). Sia

- (a, b) un intervallo limitato,
- $f \in C([a, b])$,
- $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione peso.

Se

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{\eta} w_j f_j, \quad \text{con } f_j = f(x_j)$$

è una formula di quadratura avente grado di precisione almeno n , posto $\mathcal{E}_n(f) = I(f) - I_n(f)$, si ha

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^{\eta} |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \quad (8.1)$$

DIMOSTRAZIONE. 8.1.

- Se $q \in \mathbb{P}_n$ è un polinomio arbitrario di grado n , avendo la formula di quadratura grado di precisione almeno n , ed $I(q) = I_n(q)$.
- Ricordiamo inoltre che gli operatori I ed I_n sono lineari e quindi

$$I_n(f - q) = I_n(f) - I_n(q), \quad I(f - q) = I(f) - I(q).$$

- Per quanto visto $|I_n(f)| \leq \|I_n\|_\infty \|f\|_\infty$, $|I(f)| \leq \|f\|_\infty \|w\|_1$.

Quindi, se $q \in \mathbb{P}_n$ è il polinomio di miglior approssimazione di f , da

- $|I_n(f)| \leq \|I_n\|_\infty \|f\|_\infty = \sum_{j=1}^n |w_j| \|f\|_\infty$,
- $|I(f)| \leq \|f\|_\infty \|w\|_1$,
- $\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty = \|f - q\|_\infty$.

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(f) &= |I(f) - I_n(f)| = |I(f) - I_n(q) + I_n(q) - I_n(f)| \\ &\leq |I(f) - I_n(q)| + |I_n(q) - I_n(f)| \\ &\leq |I(f) - I(q)| + |I_n(q - f)| \\ &\leq |I(f - q)| + |I_n(f - q)| \\ &\leq \|w\|_1 \|f - q\|_\infty + \|I_n\|_\infty \|f - q\|_\infty \\ &= (\|w\|_1 + \|I_n\|_\infty) \cdot \|f - q\|_\infty \\ &= \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^n |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \end{aligned}$$

da cui la tesi. $\triangle$

NOTA. 8.1 (Importante!). *L'interesse di questo teorema è il legame col polinomio di miglior approssimazione. Risulta importante osservare che in*

$$|\mathcal{E}_n(f)| \leq \left(\|w\|_1 + \sum_{j=1}^n |w_j| \right) \cdot \min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty. \quad (8.2)$$

contribuiscono i prodotti di due termini.

1. Il primo è dovuto alla funzione peso e alla stabilità della formula di quadratura.
2. Il secondo è dato esclusivamente dalla miglior approssimazione di f (e non fw).

Quindi se w è una funzione peso con

- fw **non regolare**
- ma f **regolare**

allora l'utilizzo di formule gaussiane rispetto alla funzione peso w , come anticipato prima, offre risultati potenzialmente migliori, come suggerito dai teoremi di Jackson sulla miglior approssimante polinomiale di una funzione f , che forniscono stime di

$$\min_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

con $f \in C([a, b])$ (dotando $C([a, b])$ della norma infinito).

ESEMPIO 8.1. *Quale esempio consideriamo una formula*

- a pesi positivi,
- grado di precisione $n \geq 0$.

Necessariamente, posto $E_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$,

- $\|I_n\|_\infty = \sum_i |w_i| = \sum_i w_i = \|w\|_1 = \int_a^b w(x)dx$, in quanto la formula integra esattamente la costante 1,
- $\|I\|_\infty = \|w\|_1$,

ricaviamo

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \left(\sum_i |w_i| + \|w\|_1 \right) E_n(f) = 2\|w\|_1 E_n(f).$$

Se ad esempio $w \equiv 1$ nell'intervallo $(-1, 1)$, da $\|w\|_1 = 2$ si ha che

$$|I(f) - I_n(f)| \leq 4 \cdot E_n(f).$$

ESERCIZIO 8.1. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^1 \exp(x) \sqrt{1-x^2} dx$$

con

- la formula di Gauss-Legendre e
- una formula di Gauss-Jacobi con esponenti $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$.

Quale delle due sarà da usare e perchè?

9. Teorema di Polya-Steklov, sulla convergenza delle formule di quadratura. Sia $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione peso, con (a, b) limitato. Sotto queste ipotesi, se f continua in $[a, b]$ allora $fw \in L^1(a, b)$.

Definita la famiglia di formule $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con g.d.p. non necessariamente n)

$$I_w(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx \approx S_n(f) := \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}) \quad (9.1)$$

introduciamo l'errore della formula n -sima

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}).$$

Ci si domanda quando

$$\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n}) \rightarrow 0.$$

TEOREMA 9.1 (Polya-Steklov, [3], p.202). Siano

- $[a, b]$ un intervallo compatto,
- $S_n(f) = \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n})$, $n = 0, 1, \dots$ una sequenza di formule di quadratura tale che $I_w(f) \approx S_n(f)$.
- $\mathcal{E}_n(f) := \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n}f(x_{i,n})$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni $f \in C([a, b])$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$$

è che

1. esista $M \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M$ (indip. da n);
2. per ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. 9.1. $\Leftarrow$ Supponiamo che

1. esista $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni n si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M;$$

2. per ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(x^k) = 0.$$

Per un teorema di densità dovuto a Weierstrass, per ogni $\tau_1 > 0$ esiste un polinomio p tale che $\|f - p\|_\infty \leq \tau_1$.

Fissato n , per la definizione di norma degli operatori, si ha che

$$\|I_w\|_\infty = \sup_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{|I_w(g)|}{\|g\|_\infty}$$

e dato che $\|I_w\|_\infty = \|w\|_1$

$$|I_w(g)| \leq \|I_w\|_\infty \|g\|_\infty = \|w\|_1 \|g\|_\infty, \quad \forall g \in C([a, b]) \quad (9.2)$$

Similmente

$$\|S_n\|_\infty = \sup_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{|S_n(g)|}{\|g\|_\infty} \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}|$$

implica che

$$|S_n(g)| \leq \|S_n\|_\infty \|g\|_\infty = \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|g\|_\infty. \quad (9.3)$$

Posto $g = f - p$ in $|I_w(g)| \leq \|w\|_1 \|g\|_\infty$, $|S_n(g)| \leq \sum_i |w_i| \|g\|_\infty$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(f - p)| &= |I_w(f - p) - S_n(f - p)| \leq |I_w(f - p)| + |S_n(f - p)| \\ &\leq \|w\|_1 \|f - p\|_\infty + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \|f - p\|_\infty \\ &= \left(\|w\|_1 + \sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) \cdot \|f - p\|_\infty \\ &\leq (\|w\|_1 + M) \cdot \tau_1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Di conseguenza $|\mathcal{E}_n(f-p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \tau_1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si osservi che il secondo membro della precedente disuguaglianza non dipende da n .

Poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(p) = 0$, per ogni $\tau_2 > 0$ esiste $\tilde{N}(\tau_2) \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq \tilde{N}(\tau_2)$ allora $|\mathcal{E}_n(p)| \leq \tau_2$.

Di conseguenza fissato $\epsilon > 0$ e posto

- $\tau_1 = \epsilon / (2 \cdot (\|w\|_1 + M))$,
- $\tau_2 = \epsilon / 2$,

abbiamo che esiste $N(\epsilon) = \tilde{N}(\epsilon/2)$ tale che se $n \geq N(\epsilon)$ allora

$$|\mathcal{E}_n(f-p)| \leq (\|w\|_1 + M) \cdot \tau_1 = \frac{(\|w\|_1 + M) \cdot \epsilon}{2 \cdot (\|w\|_1 + M)} = \epsilon/2$$

e

$$|\mathcal{E}_n(p)| \leq \tau_2 = \epsilon/2.$$

Quindi, dalla linearità di $\mathcal{E}_n$, per $n \geq N(\epsilon) = \tilde{N}(\tau_2)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(f)| &\leq |\mathcal{E}_n(f) - \mathcal{E}_n(p)| + |\mathcal{E}_n(p)| = |\mathcal{E}_n(f-p)| + |\mathcal{E}_n(p)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned} \tag{9.5}$$

che permette di concludere dalla definizione di limite che $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$.

$\Rightarrow$ Mostriamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_n(f) = 0$ allora esiste $M \in \mathbb{R}$ indipendente da n per cui si abbia

$$\sum_{i=1}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M.$$

Supponiamo che per ogni $f \in C([a, b])$ sia $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$. Essendo

$$\mathcal{E}_n(f) = I_w(f) - S_n(f)$$

abbiamo $S_n(f) = I_w(f) - \mathcal{E}_n(f)$ e quindi per la disuguaglianza triangolare e $|I_w(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty$

$$|S_n(f)| \leq |I_w(f)| + |\mathcal{E}_n(f)| \leq \|w\|_1 \|f\|_\infty + |\mathcal{E}_n(f)|.$$

Poichè $\lim_n \mathcal{E}_n(f) = 0$ necessariamente $\lim_n |\mathcal{E}_n(f)| = 0$ e quindi, dalla definizione di limite, segue facilmente che esiste $M(f) \in \mathbb{R}$ (indipendente da n , ma dipendente da f) tale che

$$|S_n(f)| \leq M(f) < \infty.$$

Il teorema di uniforme limitatezza (talvolta citato come di Banach-Steinhaus) [2, p.58] stabilisce che

- se L_n è una sequenza di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach V a uno spazio di Banach W ,
- per ogni $v \in V$ la sequenza $\{L_n(v)\}_n$ è limitata,

allora

$$\sup_n \|L_n\| < +\infty.$$

Nel nostro caso

- $V \equiv (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, $W \equiv \mathbb{R}$ sono spazi di Banach,
- posto $L_n \equiv S_n$, operatore lineare limitato con norma $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|$, se $f \in C([a, b])$ abbiamo che la sequenza $\{S_n(f)\}_n$ è limitata in quanto esiste $M(f) < \infty$ indipendente da n tale che $|S_n(f)| \leq M(f) < \infty$.

Per il teorema di Banach-Steinhaus, da $\|S_n\|_\infty = \sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|$ si ha

$$\sup_n \left(\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| \right) = \sup_n \|S_n\|_\infty < +\infty.$$

e quindi esiste M finito tale che $\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| \leq M < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il secondo punto da dimostrare è ovvio in quanto per ogni k , si ha $x^k \in C([a, b])$.

NOTA. 9.1.

- *L'intervallo $[a, b]$ è limitato per cui il teorema di Polya non è applicabile per funzioni peso quali Gauss-Laguerre e Gauss-Hermite.*
- *Si osservi che in generale le formule di errore introdotte nei capitoli precedenti, implicavano la convergenza in caso l'integranda f fosse sufficientemente regolare. Nel teorema di Polya-Steklov si chiede **esclusivamente** che $f \in C([a, b])$, senza però offrire stime dell'errore compiuto.*

9.1. Alcune conseguenze e osservazioni sul Teorema di Polya-Steklov.

TEOREMA 9.2. *Consideriamo una formula su un dominio limitato, con i pesi $w_{i,n}$ positivi. Essa è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p .*

DIMOSTRAZIONE. 9.2. $\Rightarrow$ *Se è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ allora lo è sicuramente per ogni $p \in \mathcal{P}_n$.*

$\Leftarrow$ *Per il teorema di Polya-Steklov, basta mostrare che se converge sui polinomi allora, in queste ipotesi, si ha che $\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| < M$ per ogni n . Poichè converge sui polinomi, lo è in particolare per $p(x) \equiv 1$, da cui*

$$\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}| = \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} = S_n(1) \xrightarrow{n} I(1) = \int_a^b w(x) dx$$

e quindi $\sup_n (\sum_{i=0}^{\eta_n} |w_{i,n}|) < M$ con M indipendente da n .

TEOREMA 9.3. *Una formula gaussiana su un dominio limitato è convergente.*

DIMOSTRAZIONE. 9.3. *Sia una formula di Gauss, su un dominio limitato, con n nodi $\{w_{i,n}\}_{i=1, \dots, n}$ positivi. Per quanto detto, è convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p . Ma ciò è verificato banalmente in quanto essendo il grado di precisione almeno $2n - 1$, fissato k , per $n \geq \text{ceil}((k+1)/2)$ si ha $E_n(x^k) = 0$.*

Quindi, essendo tutti gli zeri contenuti in (a, b) , possiamo applicare il teorema di Polya-Steklov e dedurre che al crescere del numero di punti n della formula gaussiana si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f) = 0$$

qualsiasi sia la funzione continua $f \in C(a, b)$.

TEOREMA 9.4. Una sequenza di formule composte, basate su regole a pesi positivi e g.d.p. $n \geq 0$, risulta convergente qualora l'ampiezza delle suddivisioni tenda a 0.

DIMOSTRAZIONE. 9.4 (Facoltativa). Si consideri la suddivisione $\Delta_m = \{\tau_i\}_{i=0, \dots, m}$ dell'intervallo (a, b) con

$$\tau_i < \tau_{i+1}, \quad \tau_0 = a, \quad \tau_m = b$$

nodi della formula in questione.

Visto che la formula composta ha pesi positivi, risulta convergente per ogni $f \in C([a, b])$ se e solo se è convergente per ogni polinomio p .

Mostriamo che è convergente per qualsiasi polinomio p .

Osserviamo che tale formula composta integra esattamente ogni funzione polinomiale a tratti di grado n su Δ e che se $s_{\Delta_m, n}$ è l'interpolante polinomiale a tratti di grado n della funzione f relativamente alla suddivisione Δ_m e ai nodi di quadratura,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_m, n}) dx + \int_a^b s_{\Delta_m, n} dx \\ &= \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_m, n}) dx + \sum_{i=0}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

da cui se $f \in C^{(n+1)}([a, b])$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x) - s_{\Delta_m, n}) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b 1 \cdot dx \right| \cdot \|f - s_{\Delta_m, n}\|_\infty \\ &\leq (b - a) \cdot \|f - s_{\Delta_m, n}\|_\infty \\ &\leq (b - a) \cdot \frac{h^{(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Siccome un polinomio $f(x) = x^k$ è infinitamente derivabile, $f^{(n+1)}$ è continua in $[a, b]$ e quindi per il teorema di Weierstrass $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ è finito.

Di conseguenza, se la successione di formule composte è tale che la massima ampiezza h della suddivisione tende a 0 allora $\mathcal{E}_n(x^k) \rightarrow 0$. Per il teorema di Polya-Steklov si ha così che la formula composta a pesi positivi

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=1}^{\eta_n} w_{i,n} f(x_{i,n}) \quad (9.8)$$

è tale che qualsiasi sia la funzione continua f , $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$ quando la massima ampiezza dei subintervalli tende a 0. $\triangle$

TEOREMA 9.5 (Facoltativo). Una formula $I_n(f) \approx \int_a^b f(x)w(x)dx := I(f)$ a pesi positivi convergente sui polinomi e avente grado di precisione almeno 0 risulta convergente sulle funzioni continue a tratti in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. 9.5 (Facoltativa). Se f è tale funzione, si dimostra che per ogni $\epsilon > 0$ esistono due funzioni $f_1, f_2 \in C([a, b])$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$ e $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \epsilon$.

Osserviamo che

- Poichè la formula è a pesi positivi, $f_1 \leq f \leq f_2$ implica che $I_n(f_1) \leq I_n(f) \leq I_n(f_2)$.
- Essendo $f_1 \leq f \leq f_2$,

$$\int_a^b f_1(x)w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)w(x)dx.$$

- Per il teorema di Polya-Steklov abbiamo inoltre che essendo $f_1, f_2 \in C([a, b])$ allora $\lim_n \mathcal{E}_n(f_1) = 0$ e $\lim_n \mathcal{E}_n(f_2) = 0$.

Ora notiamo che

$$I(f_1) - I_n(f_2) \leq I(f) - I_n(f) \leq I(f_2) - I_n(f_1). \quad (9.9)$$

Per la linearità degli operatori I, I_n

$$\mathcal{E}_n(f_1) + I_n(f_1 - f_2) = (I(f_1) - I_n(f_1)) + I_n(f_1 - f_2) = I(f_1) - I_n(f_2) \quad (9.10)$$

$$\mathcal{E}_n(f_2) + I_n(f_2 - f_1) = (I(f_2) - I_n(f_2)) + I_n(f_2 - f_1) = I(f_2) - I_n(f_1) \quad (9.11)$$

Inoltre

$$I_n(f_2 - f_1) = \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k(f_2(x_k) - f_1(x_k)) \leq \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty \quad (9.12)$$

$$I_n(f_1 - f_2) = -I_n(f_2 - f_1) \geq -\sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty \quad (9.13)$$

Quindi da (9.9), in virtù di (9.11), (9.12)

$$\mathcal{E}_n(f) \leq I(f_2) - I_n(f_1) = \mathcal{E}_n(f_2) + I_n(f_2 - f_1) \leq \mathcal{E}_n(f_2) + \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty$$

mentre da (9.9), in virtù di (9.10), (9.13)

$$\mathcal{E}_n(f_1) - \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty \leq \mathcal{E}_n(f_1) + I_n(f_1 - f_2) = I(f_1) - I_n(f_2) \leq \mathcal{E}_n(f)$$

cioè

$$\mathcal{E}_n(f_1) - \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty \leq \mathcal{E}_n(f) \leq \mathcal{E}_n(f_2) + \sum_{k=1}^{\eta_n} w_k \|f_2 - f_1\|_\infty$$

Dal fatto che $\sum_{k=1}^{\eta_n} w_k = \int_a^b w(x)dx < +\infty$, $\lim_n \mathcal{E}_n(f_1) = \lim_n \mathcal{E}_n(f_2) = 0$ e $\|f_2 - f_1\|_\infty \leq \epsilon$, dall'arbitrarietà di ϵ deduciamo che $\mathcal{E}_n(f) \rightarrow 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, 2001.
- [3] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [4] A. Quarteroni e F. Saleri, *Introduzione al calcolo scientifico*, Springer Verlag, 2006.