

# Approssimazione e interpolazione con polinomi algebrici

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica

5 aprile 2016

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado  $n$ ,  
aventi come noto dimensione  $N_n = n + 1$ .

Risulta evidente che se  $S_n \equiv \mathbb{P}_n$  si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

Inoltre se  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è lo spazio normato delle continue  $C([a, b])$  in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

si ha che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subseteq (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Definizione

*Un insieme  $S$  si dice denso in uno spazio normato  $X$  se per ogni  $x \in X$ , fissato  $\epsilon > 0$ , esiste  $s \in S$  tale che  $\|x - s\| < \epsilon$ .*

Equivalentemente,

## Definizione

*Un insieme  $S$  si dice denso in uno spazio normato  $X$ , se per ogni  $x \in X$  esiste una successione  $\{s_n\}$  di elementi di  $S$  tale che  $s_n \rightarrow x$ .*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Teorema

*Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio funzionale normato e*

$$\emptyset \neq S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

*una successione crescente di sottoinsiemi di  $X$ . Allora*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

*se e solo se  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Lemma (Teorema dell'estremo inferiore)

*Un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore.*

### Nota.

*Osserviamo che essendo  $S_n \neq \emptyset$ , necessariamente esiste  $p_n^* \in S_n$  e quindi se  $M = \|p_n^* - f\|$  ed esiste  $E_n(f) = \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|$  allora  $0 \leq E_n(f) \leq M$ .*

*Ma essendo  $0 \leq E_n(f)$ , per il teorema dell'estremo inferiore, necessariamente esiste*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|.$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

⇒ Supponiamo sia  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$  per ogni  $f \in X$ .  
Sia  $f \in X$  e sia fissato un arbitrario  $\epsilon > 0$ .

Allora

- ▶ per un qualche  $n$  si ha  $E_n(f) < \epsilon/2$ ,
- ▶ dalle proprietà dell'estremo inferiore, da  $E_n(f) < \epsilon/2$ , si ha pure che per  $\delta > 0$  esiste  $p_n \in S_n$  tale che  $\|p_n - f\| < \epsilon + \delta$ . In particolare per  $\delta = \epsilon/2$  deduciamo che esiste  $p_n \in S_n$  tale che  $\|p_n - f\| < \epsilon$ .

Di conseguenza per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un certo  $p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|p - f\| < \epsilon$ , cioè  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  è denso in  $X$ .

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

$\Leftarrow$  Viceversa sia  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  denso in  $X$  ed  $f \in X$ .

Essendo

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

la successione  $\{E_n(f)\}_n$  è decrescente e quindi ammette limite.

Essendo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  denso in  $X$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  tale che  $\|f - p\| \leq \epsilon$ . Se  $p \in S_{n^*}$  allora  $E_{n^*}(f) \leq \epsilon$ .

Quindi per  $\epsilon > 0$  arbitrario, essendo la successione  $\{E_n(f)\}_n$  decrescente si ha  $\lim_n E_n(f) \leq \epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$  cioè

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0.$$



# Teorema dell'approssimazione di Weierstrass

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densità.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [6, p.107].

**Teorema (Weierstrass, 1885, (ma anche Runge 1885))**

*Ogni funzione continua in  $[a, b]$  è limite uniforme di una successione di polinomi.*

Tale Teorema è equivalente a dire che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n$  è denso in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  e quindi dal Teorema 0.1 deduciamo che se  $f \in C([a, b])$  allora  $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ .

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Miriamo a mostrare l'esistenza di un elemento di miglior appross., sotto particolari condizioni. Osserviamo che (cf. [7, p.151])

## Teorema (Weierstrass (1860) (ma anche Bolzano (1830)))

*Una funzione continua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono  $x_{min}$  ed  $x_{max}$  tali che*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

*per ogni  $x \in S$ .*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Nota.

*Il teorema fu scoperto da Bolzano e in seguito riscoperto da Weierstrass.*

*Non lo si confonda con il teorema di Bolzano-Weierstrass.*

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

*In uno spazio euclideo finito dimensionale, ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Inoltre (cf. [7, p.150])

## Lemma

*In uno spazio normato  $X$  di dimensione finita, un suo sottinsieme  $S$  è compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Ricordiamo che

## Definizione

*Un sottoinsieme  $S$  di uno spazio metrico  $X$  si dice compatto se e solo se ogni successione di punti possiede una sottosuccessione che converge ad un punto di  $S$ .*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Lemma

*Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $f \in X$ . Sia  $S \subset X$  aperto e  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ . La funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in ogni punto di  $S$ .*

## Dimostrazione.

Osserviamo che se  $x, y \in X$  allora

$$|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|.$$

Infatti, siano  $x, y \in X$ , e vista la loro arbitrarietà non è restrittivo supporre  $\|x\| \geq \|y\|$ . Dalla diseguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \Leftrightarrow |||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

*Intendiamo mostrare che la funzione  $d(f, \cdot)$  è continua nell'aperto  $S$  cioè*

- ▶ per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta(\epsilon) > 0$ , tale che se  $\|x - y\| \leq \delta(\epsilon)$ ,  $x, y \in S$ , allora  $\|d(f, x) - d(f, y)\| \leq \epsilon$ .

*Fissato  $\epsilon > 0$ ,  $x \in S$ , sia  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ . Allora se  $y \in S$ ,  $\|x - y\| \leq \epsilon$ , visto che  $\|\|x_1\| - \|x_2\|\| \leq \|x_1 - x_2\|$  pure per  $x_1 = f - x$ ,  $x_2 = f - y$ ,*

$$\begin{aligned}|d(f, x) - d(f, y)| &= \|\|f - x\| - \|f - y\|\| \\ &\leq \|(f - x) - (f - y)\| = \|x - y\| \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

*e quindi la funzione  $d(f, \cdot)$  è continua in  $x \in S$ .*



# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Il lemma precedente serve a mostrare la seguente proposizione.

## Teorema

*Sia  $S$  un sottospazio vettoriale di uno spazio normato  $X$ . Si supponga che*

- ▶  *$S$  sia di dimensione finita,*
- ▶  *$f$  sia un certo elemento di  $X$ .*

*Allora esiste  $s^* \in S$ , detto di miglior approssimazione di  $f$  in  $S$ , tale che*

$$\|f - s^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

- ▶ L'elemento 0 dello spazio normato  $X$  appartiene certamente in ogni suo sottospazio, e quindi pure in  $S$ . Così sicuramente

$$E(f) \equiv \inf_{p \in S} \|p - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|.$$

- ▶ La funzione  $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$  è continua in  $S$ .
- ▶ Essendo lo spazio  $S$  di dimensione finita, la palla  $B_S(f, \|f\|) = \{p \in S : \|p - f\| \leq \|f\|\}$  centrata in  $f$  e avente raggio  $\|f\|$  essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta.

Quindi per il teorema di Weierstrass la funzione  $d(f, \cdot)$  ha minimo  $p^*$  in  $B_S(f, \|f\|)$  e di conseguenza in  $E(f) = \|f - p^*\|$ .  $\triangle$

# Teorema di equioscillazione

## Corollario

Per ogni  $k \geq 0$ , fissata  $f \in (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  esiste un polinomio  $p_k^* \in \mathbb{P}_k$  di miglior approssimazione.

Riguardo l'**unicità** di tale  $p_k^*$  (cf.[2], p.112, [4], [6, p.149], [3, p.3]).

## Teorema (di equioscillazione (Chebyshev, $\approx 1850$ ))

Sia  $f \in C([a, b])$  con  $[a, b]$  limitato e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora esiste un unico elemento  $p_n^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono  $n + 2$  elementi  $a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$  tali che

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \|f - p_n^*\|_\infty, \quad j = 0, 1, \dots, n + 1$$

con  $\sigma = 1$  oppure  $\sigma = -1$ .

# Teorema di equioscillazione

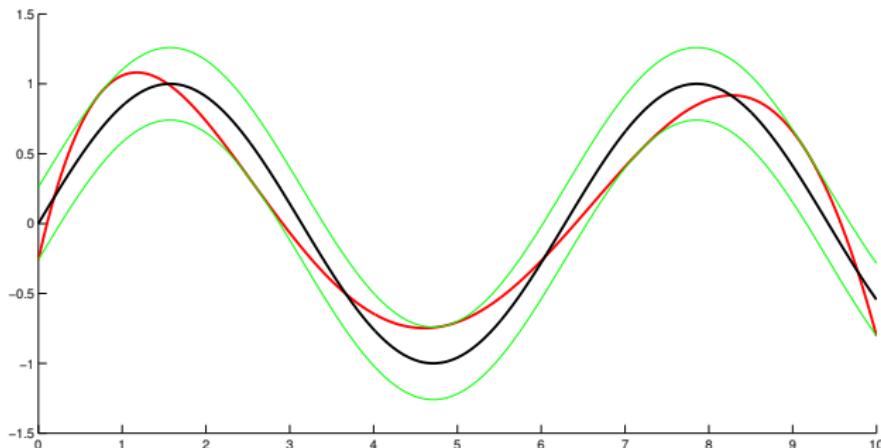


Figura : Equioscillazione: in nero  $\sin(x)$  in  $[0, 10]$ , in rosso il polinomio di miglior approssimazione  $p_5^*$  di grado 5, in verde le funzioni  $f \pm E_n(f)$ . Si notino le 7 intersezioni dell'approssimante  $p_5^*$  con il grafico di  $f \pm E_n(f)$ .

# Algoritmo di Remez

Il calcolo del polinomio  $p^* \in \mathbb{P}_n$  di miglior approssimazione di una funzione  $f \in C([a, b])$  non è semplice.

- ▶ L'**algoritmo di Remez**, scoperto nel 1934, ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice (cf. [3, p.12]).
- ▶ Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [5]). Il relativo comando si chiama `remez`.

# Alcuni esempi

Digitando sulla shell di Matlab

```
>>deg=10;
>>x=chebfun('x',[−5 5]);
>>f=1./(1+x.^2);
>>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in  $p$  il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della **funzione di Runge**  $1/(1+x^2)$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  (come stabilito dalla seconda riga).

# Alcuni esempi

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $ x - 4 $	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e - 01$	$1.61e - 01$	$1.08e - 01$
10	$6.59e - 02$	$8.40e - 02$	$7.03e - 04$
15	$2.98e - 02$	$5.68e - 02$	$2.31e - 08$
20	$9.04e - 03$	$4.28e - 02$	$6.69e - 12$
25	$4.08e - 03$	$3.43e - 02$	$2.33e - 15$
30	$1.24e - 03$	$2.86e - 02$	—
35	$5.60e - 04$	$2.46e - 02$	—
40	$1.70e - 04$	$2.15e - 02$	—
45	$7.68e - 05$	$1.91e - 02$	—
50	$2.33e - 05$	$1.72e - 02$	—
55	$1.05e - 05$	$1.56e - 02$	—
60	$3.20e - 06$	$1.43e - 02$	—
65	$1.44e - 06$	$1.32e - 02$	—
70	$4.38e - 07$	$1.23e - 02$	—
75	$1.98e - 07$	$1.14e - 02$	—
80	$6.01e - 08$	$1.07e - 02$	—
85	$2.71e - 08$	$1.01e - 02$	—
90	$8.24e - 09$	$9.51e - 03$	—
95	$3.72e - 09$	$9.00e - 03$	—
100	$1.13e - 09$	$8.55e - 03$	—

Tabella : Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior approssimazione relativamente a  $1/(1+x^2)$ ,  $|x - 4|$  e  $\sin(x)$  in  $[-5, 5]$ .

## Alcuni esempi

Dalla Tabella, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a parità di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al  $|x - 4|$  e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante.

Queste vengono fornite dai seguenti **teoremi di Jackson** [4, p.142], [1, p.224].

# Modulo di continuità

## Definizione (Modulo di continuità)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La quantità

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

si chiama modulo di continuità di  $f$ .

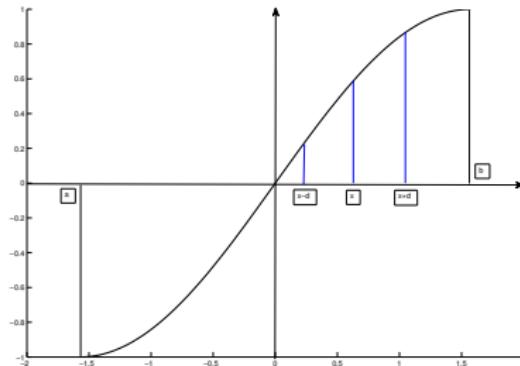


Figura : Fissato un certo  $x$  si calcola il massimo di  $|f(x_1) - f(x_2)|$  con  $x_1, x_2 \in [x - d, x + d]$ . Quindi si calcola l'estremo superiore di questa quantità al variare di  $x \in [a, b]$ , ottenendo  $\omega(f, d)$ .

# Modulo di continuità

Nota.

Se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è  $L$ -lipschitziana, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq \delta} L|x - y| = L\delta.\end{aligned}$$

Nota.

Sia  $[a, b]$  chiuso e limitato. Se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $f \in C^{(1)}([a, b])$  allora è  $L$ -lipschitziana con  $L = \max_{x \in [a, b]} |f^{(1)}(x)|$ .

# Modulo di continuità

Nota.

Se la funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\alpha$ -holderiana ( $\alpha \in (0, 1)$ ), cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha, \quad x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta} L|x - y|^\alpha = L\delta^\alpha.\end{aligned}$$

# Modulo di continuità

## Teorema (Jackson, 1912)

Per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $f \in C([a, b])$  esiste una costante  $M$  indipendente da  $n$ ,  $a$ ,  $b$  tale che

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \omega \left( f, \frac{b-a}{n} \right)$$

dove  $\omega(f, \cdot)$  è il modulo di continuità della funzione  $f$  su  $[a, b]$

## Corollario

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è  $L$ -lipschitziana, allora esiste una costante  $M$  indipendente da  $n$ ,  $a$ ,  $b$  tale che

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{b-a}{n}.$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Teorema (Jackson)

Se  $f \in C^p([a, b])$ ,  $p \geq 0$  si ha per ogni  $n > p$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \omega \left( f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p} \right).$$

## Corollario

Se  $f^{(p)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p > 0$  è  $\alpha$ -holderiana (di costante  $L$ ), allora esiste una costante  $M$  indipendente da  $n$ ,  $a$ ,  $b$  tale che

$$E_n(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \dots (n-p+1)} \cdot L \cdot \left( \frac{b-a}{n-p} \right)^\alpha.$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Teorema (Jackson)

Se  $f \in C^k([a, b])$ , ed  $f^{(k)}$  è  $\alpha$  holderiana, cioè

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x - y|^\alpha, x, y \in [a, b]$$

per qualche  $M > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Allora esiste una costante  $d_k$  indipendente da  $f$  e  $n$  per cui

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M d_k}{n^{k+\alpha}}, \quad n \geq 1.$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Ricordiamo che (cf. [6, p.12]).

## Definizione

*Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  una regione del piano complesso e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  si dice analitica in  $z_0$  se ha una rappresentazione della forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*valida in qualche intorno di  $z_0$ .*

## Definizione

*Una funzione si dice analitica in  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  se e solo se è analitica in ogni punto di  $\Omega$ .*

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $\exp(z)$ . La funzione di Runge  $1/(1 + z^2)$  è analitica in ogni regione non contenente  $-i$  e  $+i$ .

## Teorema

*Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[a, b]$ , allora esiste  $\theta \in (0, 1)$  tale che*

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n).$$

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

## Teorema (Bernstein)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{1/n} = 0$$

se e solo se  $f$  è intera (cioè si può scegliere  $\Omega = \mathbb{C}$ ).

## Nota.

Si osservi che nel precedente teorema si dice che se la funzione  $f$  è intera allora la miglior approssimante ha asintoticamente un errore inferiore rispetto al caso in cui  $f$  sia analitica in un aperto contenuto nel piano complesso.

## Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

- ▶ Per quanto visto, la funzione di Runge  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso contenente  $[-5, 5]$  (si noti che possiede i soli poli in  $-i$  e  $i$ ) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che  $E_n(f) = O(\theta^n)$  con  $\theta \approx 0.814$ .
- ▶ La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di  $f(x) = \sin(x)$ , con  $x \in [-5, 5]$  è molto rapida. In effetti  $\sin(z)$  è intera.

# Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

- Nel caso di  $f(x) = |x - 4|$  da  $\|x - 4| - |y - 4\| \leq |x - y|$  e dal fatto che per  $x \leq 4$  si ha  $f(x) = 4 - x$  mentre per  $x > 4$  si ha  $f(x) = x - 4$  si vede facilmente che per  $\delta \leq 5$

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x, y \in [-5, 5], |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| = \delta$$

e quindi dal Teorema di Jackson che per qualche  $M$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M \frac{5 - (-5)}{n} = \frac{10M}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti  $a = -5$  e  $b = 5$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{10}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di  $E_n(f)$  a 0, se paragonata alla quantità  $E_n(f) \approx 0.814^n$  trovata nell'esempio di Runge.

# Alcune note sui polinomi di Chebyshev ( $\sim 1850$ )

Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con  $x \in [-1, 1]$  (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno,  $T_n$  non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che  $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$ ,  $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$ . Dalle formule trigonometriche di addizione e sottrazione

$$\cos((n+1)\theta) = (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta)$$

$$\cos((n-1)\theta) = (\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\theta)) \cdot \sin(\theta)$$

sommendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

# Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Posto  $\theta = \arccos(x)$  si ha

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

poiché

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2(\cos(n\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2T_n(x)x$$

Di conseguenza, per ricorrenza, essendo

- ▶  $T_0(x) = 1,$
- ▶  $T_1(x) = x,$

si deduce che  $T_n$  è un **polinomio**, detto di Chebyshev, di grado  $n$  e che inoltre per  $n > 0$  è del tipo  $T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$ .

# Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Gli zeri  $x_k$  del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui  $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$ , per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev sono

- ▶ esattamente  $n$ ,
- ▶ distinti,
- ▶ nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

# Costanti di Lebesgue

Sia  $f \in C([a, b])$ , con  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio  $p_n \in \mathbb{P}_n$  che interpola le coppie  $(x_k, f(x_k))$  (per  $k = 0, \dots, n$ ,  $x_k$  a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione  $f_k := f(x_k)$ . Come è noto, indicato con  $L_k$  il k-simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_k - x_j).$$

Supponiamo che i valori di  $f_k$  siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con  $\tilde{f}_k$ .

# Costanti di Lebesgue

Quindi il polinomio interpolatore è  $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k L_k(x)$ .  
Essendo  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x)$  abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

# Costanti di Lebesgue

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left( \max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero  $\Lambda_n$  dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

# Costanti di Lebesgue

Il valore  $\Lambda_n$  è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti  $x_0, \dots, x_n$  (cf. [11]). Si vede immediatamente che è un **indice di stabilità** dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [4, p.139-140]).

Ricordiamo che se  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sono due spazi normati,  $A : X \rightarrow Y$  è un **operatore lineare limitato** se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito.

Il numero reale  $\|A\|$  si chiama **norma dell'operatore lineare**  $A$  (cf. [8, p.224]).

# Costanti di Lebesgue

Nota.

*Essendo, per ogni  $\tilde{x} \in X$ ,  $\tilde{x} \neq 0$ .*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \\ &\geq \frac{\|A\tilde{x}\|_Y}{\|\tilde{x}\|_X}\end{aligned}$$

*deduciamo facilmente che  $\|A\|$  è la più piccola costante  $C$  per cui*

$$\|A\tilde{x}\|_Y \leq C\|\tilde{x}\|_X.$$

*per ogni  $x \in X$ .*

*Si osservi che qualsiasi sia  $C$ , l'asserto è banalmente vero per  $\tilde{x} = 0$ .*

# Costanti di Lebesgue

Si può mostrare che se

$$\mathcal{L}_n : (C([a, b]), \infty) \rightarrow (C([a, b]), \infty)$$

è l'operatore (lineare e limitato) che associa a  $f \in C([a, b])$  il suo polinomio di interpolazione  $p_n$  nei nodi  $x_0, \dots, x_n$  allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a, b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione  $\mathcal{L}_n$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Nota.

*Si osservi che mentre nella norma di un operatore lineare e limitato è presente un sup, nella definizione precedente si dimostra che effettivamente è un max.*

# Costanti di Lebesgue

## Teorema

Se  $f \in C([a, b])$  e  $p_n$  è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti  $x_0, \dots, x_n$  si ha

$$\|f - p_n\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \quad (1)$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{\infty}$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

# Costanti di Lebesgue

Dimostrazione.

Se  $f \in \mathcal{P}_n$ , allora  $f \equiv p_n \equiv p_n^*$ , con  $p_n^*$  elemento di miglior approssimazione e quindi l'asserto è ovvio.

Supponiamo quindi che  $f \notin \mathcal{P}_n$ , cioè  $f - q_n \neq 0$ , per ogni  $q_n \in \mathcal{P}_n$ . Per ogni  $q_n \in \mathcal{P}_n$ , è  $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$ , in quanto l'unico polinomio che intercala in  $n+1$  punti distinti un polinomio di grado  $n$  è il polinomio stesso. Inoltre

$$\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n.$$

Poichè  $f - q_n$  non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]), g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \quad (2)$$

# Costanti di Lebesgue

Dimostrazione.

e di conseguenza

$$\|(p_n - q_n)\|_{\infty} \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_{\infty}. \quad (3)$$

Per concludere, osserviamo che per la diseguaglianza triangolare da  $f - p = (f - q) + (q - p)$  e (3)

$$\begin{aligned}\|f - p_n\|_{\infty} &= \|(f - q_n) + (q_n - p_n)\|_{\infty} \\ &\leq \|f - q_n\|_{\infty} + \|q_n - p_n\|_{\infty} \\ &\leq \|f - q_n\|_{\infty} + \Lambda_n \|f - q_n\|_{\infty} \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_{\infty}\end{aligned} \quad (4)$$



# Costanti di Lebesgue

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.



Figura : Henri Lebesgue (1875-1941).

# Costanti di Lebesgue

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di  $n + 1$  punti nell'intervallo  $[-1, 1]$  (cf. [9]):

- **punti equispaziati:** si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en \log(n)};$$

- **punti di Chebyshev:** corrispondono a  $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$  dove  $k = 1, \dots, n + 1$ ; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

dove  $\gamma \approx 0.577$  è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [10]);

# Costanti di Lebesgue

- punti di Chebyshev estesi: sono definiti da  $\frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$  dove  $k = 1, \dots, n+1$ ; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$

- configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right) \right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

# Costanti di Lebesgue

Usando Matlab, notiamo quanto siano differenti  $\Lambda_n$  per  $n = 5, 10, \dots, 50$ .

```
>> n=(5:5:50)'; % GRADI.  
>> s=(2.^n)./(exp(1)*n.*log(n)); % EQSP.  
>> t=(2/pi)*(log(n+1)+0.577+(8/pi)); % CHEB.  
>> [s t]  
ans =  
2.9258e+000 3.1291e+000  
3.2720e+001 3.5150e+000  
5.9352e+002 3.7536e+000  
1.2877e+004 3.9267e+000  
3.0679e+005 4.0626e+000  
7.7425e+006 4.1746e+000  
2.0316e+008 4.2698e+000  
5.4825e+009 4.3526e+000  
1.5112e+011 4.4259e+000  
4.2351e+012 4.4915e+000  
>>
```

# Costanti di Lebesgue

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

# Bibliografia

-  K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
-  K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
-  D. Bini, *Approssimazione minimax*, <http://www.dm.unipi.it/~bini/Didattica/IAN/appunti/approx.pdf>
-  V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
-  Chebfun, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972-chebfun>
-  P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.
-  D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.
-  A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.
-  S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) <http://www.ektf.hu/tanszek/mathematika/ami>.
-  Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), [http://it.wikipedia.org/wiki/Costante\\_di\\_Eulero-Mascheroni](http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni).
-  Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue\\_constant\\_\(interpolation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation)).