Approssimazione e interpolazione con polinomi algebrici

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

7 marzo 2017

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Indichiamo con

$$\mathbb{P}_n =< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$$

lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado n, aventi come noto dimensione $N_n = n + 1$.
Risulta evidente che se $S_n \equiv \mathbb{P}_n$ si ha

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

Inoltre se $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è lo spazio normato delle continue $C([a,b])$ in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, dotato della norma infinito

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

si ha che $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subseteq (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Definizione (Densità (in spazi normati))

Un insieme S si dice densità *in uno spazio normato X se per ogni $x \in X$, fissato $\epsilon > 0$, esiste $s \in S$ tale che $\|x - s\| < \epsilon$.*

Più in generale, in spazi topologici,

Definizione (Densità (in spazi topologici))

Un insieme S si dice denso *in uno spazio topologico X, se per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{s_n\}$ di elementi di S tale che $s_n \to x$. .*

Definizione (Densità (in spazi topologici))

Sia X uno spazio topologico. Un insieme $S \subseteq X$ si dice denso *in X, se la chiusura di S è X (per la topologia di X) .*

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio funzionale normato e*

$$\emptyset \neq S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

una successione crescente di sottoinsiemi di X*. Allora*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

se e solo se $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *è denso in* X*.*

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ *Supponiamo sia* $E_n(f) = \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ *per ogni* $f \in X$. *Sia* $f \in X$ *e sia fissato un arbitrario* $\epsilon > 0$.

Allora per un qualche n *si ha* $E_n(f) < \epsilon$, *e quindi dalle proprietà dell'estremo inferiore esiste* $p_n \in S_n$ *tale che* $\|p_n - f\| \leq \epsilon$.

Di conseguenza per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un certo* $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *tale che* $\|p - f\| \leq \epsilon$, *cioè* $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *è denso in* X.

$\Leftarrow$ *Viceversa sia* $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *denso in* X *ed* $f \in X$.

Essendo

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

la successione $\{E_n(f)\}_n$ *è decrescente e quindi ammette limite.*

Essendo $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *denso in* X, *per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $p \in \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *tale che* $\|f - p\| \leq \epsilon$. *Se in particolare* $p \in S_{n^*}$ *allora per* $n \geq n^*$ *si ha* $E_n(f) \leq \epsilon$.

Quindi per $\epsilon > 0$ *arbitrario, essendo la successione* $\{E_n(f)\}$ *decrescente, si ha* $\lim_n E_n(f) \leq \epsilon$ *per ogni* $\epsilon > 0$ *cioè*

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\| \xrightarrow{n} 0.$$

$\triangle$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Nota.

Osserviamo che essendo $S_n \neq \emptyset$, necessariamente esiste $p_n^* \in S_n$ e quindi se $M = \|p_n^* - f\|$ abbiamo che $0 \leq \|p_n - f\| \leq M$ per ogni $p_n \in S_n$. Sia $A = \{\|p_n - f\| : p_n \in S_n\}$.

Il teor. dell'estremo inferiore asserisce che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore.

Di conseguenza A è inferiormente limitato e quindi esiste

$$E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in S_n} \|p_n - f\|.$$

Teorema dell'approssimazione di Weierstrass

Ci interessa vedere come questo esempio sia applicabile al caso dei polinomi algebrici e quindi necessita disporre di un risultato di densità.

Sussiste il seguente teorema di Approssimazione di Weierstrass [6, p.107].

Teorema (Weierstrass, 1885, (ma anche Runge 1885))

Ogni funzione continua in [a, b] compatto è limite uniforme di una successione di polinomi.

Tale Teorema è equivalente a dire che $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n$ è denso in $(C([a,b]), \|\cdot\|_{\infty})$ e quindi dal Teorema 0.1 deduciamo che se $f \in C([a,b])$ allora $E_n(f) \equiv \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\| \stackrel{n}{\to} 0$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Miriamo a mostrare l'esistenza di un elemento di miglior appross., sotto particolari condizioni. Osserviamo che (cf. [7, p.151])

Teorema (Weierstrass (1860) (ma anche Bolzano (1830)))

Una funzione continua $f: S \to \mathbb{R}$, con S sottinsieme compatto di uno spazio normato, ha massimo e minimo, cioè esistono x_{min} ed x_{max} tali che

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

per ogni $x \in S$.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Nota.

Il teorema fu scoperto da Bolzano e in seguito riscoperto da Weierstrass.

Non lo si confonda con il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

In uno spazio euclideo finito dimensionale, ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Inoltre (cf. [7, p.150])

Lemma

In uno spazio normato X di dimensione finita, un suo sottinsieme S è compatto se e solo se chiuso e limitato.

Ricordiamo che

Definizione

Un sottoinsieme S di uno spazio metrico X si dice compatto se e solo se ogni successione di punti possiede una sottosuccessione che converge ad un punto di S.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Lemma

Sia X uno spazio normato e sia $f \in X$. Sia $S \subset X$ aperto e $d(f,\cdot) = \|f - \cdot\|$. La funzione $d(f,\cdot)$ è continua in ogni punto di S.

Dimostrazione.

Osserviamo che se $x, y \in X$ allora

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Infatti, siano $x, y \in X$, e vista la loro arbitrarietà non è restrittivo supporre $\|x\| \geq \|y\|$. Dalla disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \Leftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|. \end{aligned}$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Intendiamo mostrare che la funzione $d(f,\cdot) = \|f - \cdot\|$ *è continua nell'aperto* S *cioè*

- *per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste* $\delta(\epsilon) > 0$, *tale che se* $|x - y| \leq \delta(\epsilon)$, $x, y \in S$, *allora* $\|d(f,x) - d(f,y)\| \leq \epsilon$.

Fissato $\epsilon > 0$, $x \in S$, *sia* $\delta(\epsilon) = \epsilon$. *Allora se* $y \in S$, $\|x - y\| \leq \epsilon$, *visto che* $|\|x_1\| - \|x_2\|| \leq \|x_1 - x_2\|$ *pure per* $x_1 = f - x$, $x_2 = f - y$,

$$\begin{aligned} |d(f,x) - d(f,y)| &= |\|f-x\| - \|f-y\|| \\ &\leq \|(f-x) - (f-y)\| = \|x - y\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

e quindi la funzione $d(f,\cdot)$ *è continua in* $x \in S$. $\triangle$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Il lemma precedente serve a mostrare la seguente proposizione.

Teorema

Sia S un sottospazio vettoriale di uno spazio normato X. Si supponga che

- *S sia di dimensione finita,*
- *f sia un certo elemento di X.*

Allora esiste $s^* \in S$, detto di miglior approssimazione di f in S, tale che

$$\|f - s^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione.

- L'elemento 0 dello spazio normato X appartiene certamente in ogni suo sottospazio, e quindi pure in S. Così sicuramente

$$E(f) \equiv \inf_{p \in S} \|p - f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|.$$

- La funzione $d(f, \cdot) = \|f - \cdot\|$ è continua in S.
- Essendo lo spazio S di dimensione finita, la palla $B_S(f, \|f\|) = \{p \in S : \|p - f\| \leq \|f\|\}$ centrata in f e avente raggio $\|f\|$ essendo chiusa (per la topologia indotta!) e limitata è pure compatta.

Quindi per il teorema di Weierstrass la funzione $d(f, \cdot)$ ha minimo p^* in $B_S(f, \|f\|)$ e di conseguenza in $E(f) = \|f - p^*\|$. $\triangle$

Teorema di equioscillazione

Corollario

Per ogni $k \geq 0$, fissata $f \in (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ esiste un polinomio $p_k^* \in \mathbb{P}_k$ di miglior approssimazione.

Riguardo l'unicità di tale p_k^* (cf.[2], p.112, [4], [6, p.149], [3, p.3]).

Teorema (di equioscillazione (Chebyshev, $\approx$ 1850))

Sia $f \in C([a,b])$ con $[a,b]$ limitato e $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico elemento $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione. Si caratterizza come segue. Esistono $n+2$ elementi $a \leq x_0 < \ldots < x_{n+1} \leq b$ tali che

$$f(x_j) - p_n^*(x_j) = \sigma(-1)^j \|f - p_n\|_\infty, \;\; j = 0, 1, \ldots, n+1$$

con $\sigma = 1$ oppure $\sigma = -1$.

Teorema di equioscillazione

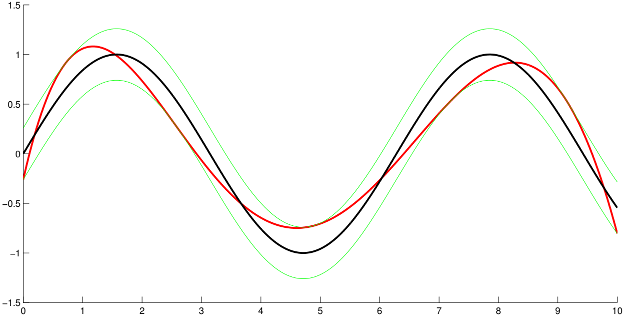

Figura : Equioscillazione: in nero $\sin(x)$ in $[0, 10]$, in rosso il polinomio di miglior approssimazione p_5^* di grado 5, in verde le funzioni $f \pm E_n(f)$. Si notino le 7 intersezioni dell'approssimante p_5^* con il grafico di $f \pm E_n(f)$.

Algoritmo di Remez

Il calcolo del polinomio $p^* \in \mathbb{P}_n$ di miglior approssimazione di una funzione $f \in C([a, b])$ non è semplice.

- L'algoritmo di Remez, scoperto nel 1934, ne permette una sua determinazione ma la descrizione dello stesso non è semplice (cf. [3, p.12]) .
- Una sua buona implementazione la si ha in ambiente Matlab cui siano state aggiunte le routines di Chebfun (cf. [5]). Il relativo comando si chiama `remez`.

Digitando sulla shell di Matlab

```
>>deg=10;
>> x=chebfun('x',[-5 5]);
>> f=1./(1+x.^2);
>>[p,err]=remez(f,deg);
```

otteniamo in p il polinomio di miglior approssimazione di grado 10 della funzione di Runge $1/(1+x^2)$ nell'intervallo $[-5,5]$ (come stabilito dalla seconda riga).

Alcuni esempi

Grado	Errore $1/(1+x^2)$	Errore $\|x-4\|$	Errore $\sin(x)$
5	$2.17e-01$	$1.61e-01$	$1.08e-01$
10	$6.59e-02$	$8.40e-02$	$7.03e-04$
15	$2.98e-02$	$5.68e-02$	$2.31e-08$
20	$9.04e-03$	$4.28e-02$	$6.69e-12$
25	$4.08e-03$	$3.43e-02$	$2.33e-15$
30	$1.24e-03$	$2.86e-02$	$-$
35	$5.60e-04$	$2.46e-02$	$-$
40	$1.70e-04$	$2.15e-02$	$-$
45	$7.68e-05$	$1.91e-02$	$-$
50	$2.33e-05$	$1.72e-02$	$-$
55	$1.05e-05$	$1.56e-02$	$-$
60	$3.20e-06$	$1.43e-02$	$-$
65	$1.44e-06$	$1.32e-02$	$-$
70	$4.38e-07$	$1.23e-02$	$-$
75	$1.98e-07$	$1.14e-02$	$-$
80	$6.01e-08$	$1.07e-02$	$-$
85	$2.71e-08$	$1.01e-02$	$-$
90	$8.24e-09$	$9.51e-03$	$-$
95	$3.72e-09$	$9.00e-03$	$-$
100	$1.13e-09$	$8.55e-03$	$-$

Tabella : Algoritmo di Remez. Errore assoluto di miglior approssimazione relativamente a $1/(1+x^2)$, $|x-4|$ e $\sin(x)$ in $[-5, 5]$.

Dalla Tabella, risulta chiaro che la miglior approssimante polinomiale a paritá di grado approssima meglio la funzione di Runge rispetto al $|x - 4|$ e viene da chiedersi se esistano delle stime sull'errore compiuto dalla migliore approssimante.

Queste vengono fornite dai seguenti **teoremi di Jackson** [4, p.142], [1, p.224].

Modulo di continuità

Definizione (Modulo di continuità)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La quantità

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|$$

si chiama modulo di continuità di f.

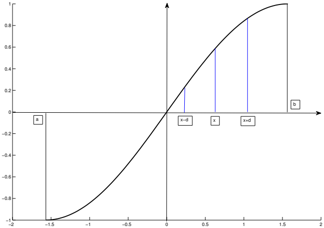

Figura : Fissato un certo x si calcola il massimo di $|f(x_1) - f(x_2)|$ con $x_1, x_2 \in [x - d, x + d]$. Quindi si calcola l'estremo superiore di questa quantità al variare di $x \in [a, b]$, ottenendo $\omega(f, d)$.

Modulo di continuità

Nota.

Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è L-lipschitziana, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \;\; x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta) \quad &:= \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} L|x - y| = L\delta. \end{aligned}$$

Non è difficile mostrare che se f è L-lipschitziana in $[a, b]$ allora è pure continua in $[a, b]$.

Nota.

Sia $[a, b]$ chiuso e limitato. Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è tale che $f \in C^{(1)}([a, b])$ allora è L-lipschitziana con $L = \max_{x \in [a,b]} |f^{(1)}(x)|$.

Modulo di continuità

Nota.

Se la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *è* α*-holderiana* ($\alpha \in (0, 1)$)*, cioè*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha}, \; x, y \in [a, b]$$

allora

$$\begin{aligned}\omega(f, \delta) &:= \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x,y \in [a,b],\, |x-y| \leq \delta} L|x - y|^{\alpha} = L\delta^{\alpha}.\end{aligned}$$

Modulo di continuità

Teorema (Jackson, 1912)

Per ogni $n \geq 1$ *e per ogni* $f \in C([a,b])$ *esiste una costante* M *indipendente da* n, a, b *tale che*

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M\, \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)$$

dove $\omega(f, \cdot)$ *è il modulo di continuità della funzione* f *su [a,b]*

Corollario

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è L-lipschitziana, allora esiste una costante* M^* *indipendente da* n, a, b *tale che*

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^* \, \frac{b-a}{n}.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema (Jackson)

Se $f \in C^p([a,b])$, $p \geq 0$ si ha per ogni $n > p$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1)} \omega \left(f^{(p)}, \frac{b-a}{n-p} \right).$$

Corollario

Se $f^{(p)} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $p > 0$ è α-holderiana (di costante L), allora esiste una costante M indipendente da n, a, b tale che

$$E_n(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1)} \cdot L \cdot \left(\frac{b-a}{n-p} \right)^\alpha.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema (Jackson)

Se $f \in C^k([a,b])$, *ed* $f^{(k)}$ *è* α *holderiana, cioè*

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, x, y \in [a,b]$$

per qualche $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$.

Allora esiste una costante d_k *indipendente da* f *e* n *per cui*

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq \frac{M\, d_k}{n^{k+\alpha}}, \; n \geq 1.$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Ricordiamo che (cf. [6, p.12]).

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione del piano complesso e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \Omega$, f si dice analitica in z_0 se ha una rappresentazione della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di z_0.

Definizione

Una funzione si dice analitica in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se è analitica in ogni punto di Ω.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\exp(z)$. La funzione di Runge $1/(1+z^2)$ è analitica in ogni regione non contenente $-i$ e $+i$.

Teorema

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[a,b]$, allora esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n).$$

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Teorema (Bernstein)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} = 0$$

se e solo se f è intera (cioè si può scegliere $\Omega = \mathbb{C}$).

Nota.

Si osservi che nel precedente teorema si dice che se la funzione f è intera allora la miglior approssimante ha asintoticamente un errore inferiore rispetto al caso in cui f sia analitica in un aperto strettamente contenuto nel piano complesso.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Nota. (Convergenza della funzione di Runge)

Per quanto visto, la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$, con $x \in [-5,5]$ è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[-5,5]$ (si noti che possiede i soli poli in $-i$ e i) e una verifica empirica con i dati della tabella stabilisce che $E_n(f) = O(\theta^n)$ con $\theta \approx 0.814$.

Nota. (Convergenza della funzione sin)

La convergenza del polinomio di migliore approssimazione nel caso di $f(x) = \sin(x)$, con $x \in [-5,5]$ è molto rapida. In effetti $\sin(z)$ è intera.

Migliore approssimazione con polinomi algebrici in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Nota. (Convergenza della funzione $f(x) = |x-4|$)

Da $||x-4|-|y-4|| \leq |x-y|$ e dal fatto che per $x \leq 4$ si ha $f(x) = 4-x$ mentre per $x > 4$ si ha $f(x) = x-4$ si vede facilmente che per $\delta \leq 5$

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x,y\in[-5,5],\, |x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)| = \delta$$

Così, dal Teorema di Jackson, per qualche M,

$$E_n(f) = \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right) = M\frac{b-a}{n} = \frac{10M}{n}.$$

In effetti, un confronto coi dati stabilisce che posti $a=-5$, $b=5$

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_\infty \approx 0.085 \cdot \frac{10}{n} = \frac{0.85}{n}$$

e quindi una convergenza lenta di $E_n(f)$ a 0, rispetto $E_n(f) \approx 0.814^n$ dell'esempio di Runge.

Alcune note sui polinomi di Chebyshev ($\sim$ 1850)

Consideriamo la funzione

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

con $x \in [-1, 1]$ (cf. [1, p.211]). A priori, in virtù della presenza del coseno, T_n non sembra essere un polinomio. In realtà si vede subito che $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1$, $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$. Dalle formule trigonometriche di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) - (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \\ \cos((n-1)\,\theta) &= (\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) + (\sin(n\,\theta)) \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

sommando membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta)$$

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Posto $\theta = \arccos(x)$ si ha

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

poiché

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\,(\cos(n\,\theta)) \cdot \cos(\theta) = 2\,T_n(x)x$$

Di conseguenza, per ricorrenza, essendo

- $T_0(x) = 1$,
- $T_1(x) = x$,

si deduce che T_n è un polinomio, detto di Chebyshev, di grado n e che inoltre per $n > 0$ è del tipo $T_n(x) = 2^{n-1}\, x^n + \cdots$.

Alcune note sui polinomi di Chebyshev

Gli zeri x_k del polinomio di Chebyshev sono i punti per cui $\cos(n \arccos(x_k)) = 0$, per cui

$$n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x_k = \cos(\arccos(x_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \; k = 0, \ldots, n-1.$$

Notiamo che gli zeri del polinomio di Chebyshev sono

- esattamente n,
- distinti,
- nell'intervallo $(-1, 1)$.

Costanti di Lebesgue

Sia $f \in C([a,b])$, con $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato e si consideri il polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola le coppie $(x_k, f(x_k))$ (per $k = 0, \ldots, n$, x_k a due a due distinti). Si ponga per semplicità di notazione $f_k := f(x_k)$. Come è noto, indicato con L_k il k-simo polinomio di Lagrange, si ha

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - x_j) / \prod_{j \neq k} (x_k - x_j).$$

Supponiamo che i valori di f_k siano perturbati (per esempio per via dell'arrotondamento del numero) e sostituiti con $\tilde{f}_k$.

Quindi il polinomio interpolatore è $\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k L_k(x)$.
Essendo $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$ abbiamo che

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \tilde{f}_k) L_k(x)$$

da cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k - \tilde{f}_k| |L_k(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

e

$$\max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

Quindi posto

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

da

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

ricaviamo

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \left(\max_k |f_k - \tilde{f}_k| \right) \cdot \Lambda_n.$$

Osserviamo che il numero Λ_n dipende esclusivamente dai polinomi di Lagrange e quindi esclusivamente dai punti di interpolazione.

Il valore Λ_n è nota come **costante di Lebesgue** (1910) dell'insieme di punti $x_0, \ldots, x_n$ (cf. [11]). Si vede immediatamente che è un indice di stabilità dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola e più l'approssimazione è stabile (cf. [4, p.139-140]).

Ricordiamo che se $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi normati, $A : X \to Y$ è un **operatore lineare limitato** se e solo se il numero

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

è finito.

Il numero reale $\|A\|$ si chiama **norma dell'operatore lineare** A (cf. [8, p.224]).

Costanti di Lebesgue

Nota.

Essendo, per ogni $\tilde{x} \in X$, $\tilde{x} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \\ &\geq \frac{\|A\tilde{x}\|_Y}{\|\tilde{x}\|_X} \end{aligned}$$

deduciamo facilmente che $\|A\|$ *è la più piccola costante* C *per cui*

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

per ogni $x \in X$.
Si osservi che qualsiasi sia C, *l'asserto è banalmente vero per* $\tilde{x} = 0$.

Costanti di Lebesgue

Si può mostrare che se

$$\mathcal{L}_n : (C([a,b]), \infty) \to (C([a,b]), \infty)$$

è l'operatore (lineare e limitato) che associa a $f \in C([a,b])$ il suo polinomio di interpolazione p_n nei nodi $x_0, \ldots, x_n$ allora

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

cioè la costante di Lebesgue è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Nota.

Si osservi che mentre nella norma di un operatore lineare e limitato è presente un sup, *nella definizione precedente si dimostra che effettivamente è un* max.

Costanti di Lebesgue

Teorema

Se $f \in C([a,b])$ e p_n è il suo polinomio di interpolazione relativo ai punti $x_0, \ldots, x_n$ si ha

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \tag{1}$$

dove

$$E_n(f) = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme.

Costanti di Lebesgue

Dimostrazione.

Se $f \in \mathcal{P}_n$, allora $f \equiv p_n \equiv p_n^*$, con p_n^* elemento di miglior approssimazione e quindi l'asserto è ovvio.

Se invece $f \notin \mathcal{P}_n$, allora $f - q_n \neq 0$, per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$.
Osserviamo che

- *Per ogni $q_n \in \mathcal{P}_n$, è $\mathcal{L}_n(q_n) = q_n$, in quanto l'unico polinomio che interpola in $n+1$ punti distinti un polinomio di grado n è il polinomio stesso;*
- $\mathcal{L}_n(f - q_n) = \mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}_n(q_n) = p_n - q_n$.

Poichè $f - q_n \in C([a,b])$ non è la funzione nulla, abbiamo

$$\Lambda_n = \max_{g \in C([a,b]),\, g \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - q_n)\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} = \frac{\|p_n - q_n\|_\infty}{\|f - q_n\|_\infty} \quad (2)$$

e di conseguenza,

$$\|p_n - q_n\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty \quad q_n \in \mathcal{P}_n. \quad (3)$$

Dimostrazione.

Essendo quindi

$$\|(p_n - q_n)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|f - q_n\|_\infty. \tag{4}$$

osserviamo che per la disuguaglianza triangolare da
$f - p = (f - q) + (q - p)$ e (4)

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &= \|(f - q_n) + (q_n - p_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|q_n - p_n\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - q_n\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - q_n\|_\infty \end{aligned} \tag{5}$$

L'asserto si ottiene scegliendo quale $q_n \in \mathcal{P}_n$ il polinomio di miglior approssimazione $q_n^* \in \mathcal{P}_n$, in quanto $E_n(f) = |f - q_n^*|$. $\triangle$

Costanti di Lebesgue

Questo teorema è utile, perchè fa capire che se la costante di Lebesgue è piccola allora l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è *poco* più grande dell'errore di miglior approssimazione uniforme.

Figura : Henri Lebesgue (1875-1941).

Costanti di Lebesgue

Vediamo ora quali sono le stime delle costanti di Lebesgue per alcuni set di $n+1$ punti nell'intervallo $[-1,1]$ (cf. [9]):

- punti equispaziati: si dimostra che asintoticamente (Turetskii, 1940)
$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{en\log(n)};$$
- punti di Chebyshev: corrispondono a $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$ dove $k=1,\ldots,n+1$; si dimostra che asintoticamente
$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1)+\gamma+\log\left(\frac{8}{\pi}\right)\right)+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
dove $\gamma \approx 0.577$ è la *costante di Eulero-Mascheroni* (cf. [10]);

- punti di Chebyshev estesi: sono definiti da $\frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$ dove $k = 1, \ldots, n+1$; si dimostra che asintoticamente

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) - \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right);$$

- configurazione ottimale: si dimostra che la minima costante di Lebesgue (non è nota esplicitamente!) vale

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi}\left(\log(n+1) + \gamma + \log\left(\frac{4}{\pi}\right)\right) + O\left(\frac{\log(\log(n+1))}{\log(n+1)}\right)$$

Costanti di Lebesgue

Usando Matlab, notiamo quanto siano differenti Λ_n per $n = 5, 10, \ldots, 50$.

```
>> n=(5:5:50)'; % GRADI.
>> s=(2.^(n+1))./(exp(1)*n.*log(n)); % EQSP.
>> t=(2/pi)*( log(n+1) + 0.577 + (8/pi) ); % CHEB.
>> [s t]
ans =
   2.9258e+000   3.1291e+000
   3.2720e+001   3.5150e+000
   5.9352e+002   3.7536e+000
   1.2877e+004   3.9267e+000
   3.0679e+005   4.0626e+000
   7.7425e+006   4.1746e+000
   2.0316e+008   4.2698e+000
   5.4825e+009   4.3526e+000
   1.5112e+011   4.4259e+000
   4.2351e+012   4.4915e+000
>>
```

Dalla stima precedente tra errore compiuto dall'interpolante rispetto a quello della miglior approssimazione uniforme, si capisce bene, una volta ancora, perchè i nodi di Chebyshev siano da preferire a quelli equispaziati.

Bibliografia

K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.

K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.

D. Bini, *Approssimazione minimax*, http://www.dm.unipi.it/∼bini/Didattica/IAN/appunti/approx.pdf

V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.

Chebfun, http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23972- chebfun

P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

D.H. Grieffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.

A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1970.

S.J. Smith, *Lebesgue constants in polynomial interpolation*, Annales Mathematicae et Informaticae, p. 109-123, 33 (2006) http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami.

Wikipedia, (Costante di Eulero Mascheroni), http://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Eulero-Mascheroni.

Wikipedia, (Lebesgue constant interpolation), http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_constant_(interpolation).