

Equazione del calore.

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

29 maggio 2017

Equazione del calore.

Consideriamo l'*equazione del calore*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = d_0(t), u(1, t) = d_1(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Sia $m > 0$ intero e sia

- $h_x = 1/m$,
- $x_j = jh_x$ con $j = 0, 1, \dots, m$.

Si può mostrare che per $j = 1, 2, \dots, m-1$ e $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$, se la soluzione è sufficientemente regolare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t) = \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t))}{h_x^2} - \frac{h_x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_j, t) \quad (2)$$

Equazione del calore.

Da

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G,$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t) \approx \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t))}{h_x^2},$

una volta posto $u_j(t) := u(x_j, t)$, ci riconduciamo a studiare invece dell'equazione del calore

$$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t)}^{u'_j(t)} = \frac{\overbrace{u(x_{j+1}, t)}^{u_{j+1}(t)} - 2\overbrace{u(x_j, t)}^{u_j(t)} + \overbrace{u(x_{j-1}, t)}^{u_{j-1}(t))}}{h_x^2} + G(x_j, t)$$

per $t > 0$.

Equazione del calore.

Di conseguenza, posto $u_j(t) := u(x_j, t)$, otteniamo quindi per $j = 1, \dots, m - 1$ il sistema di equazioni differenziali

$$u_j'(t) = \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h_x^2} + G(x_j, t) \quad (3)$$

Risolto (3), si avrà una approssimazione della soluzione dell'equazione del calore per $x_j = jh_x$ e $t \geq 0$. Il procedimento appena descritto è noto in letteratura come *metodo delle linee*.

Nel risolvere il sistema dobbiamo far attenzione alle condizioni sul bordo

$$u_0(t) = d_0(t), \quad u_m(t) = d_1(t)$$

e ricordare che la condizione iniziale del sistema di equazioni differenziali è

$$u_j(0) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Equazione del calore.

Esempio

Vediamo per esempio il caso in cui $m = 4$. Da

$$u'_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h_x^2} + G(x_j, t), \quad j = 1, 2, 3,$$

il sistema diventa, ricordando i contributi del bordo,

$$u'_1(t) = \frac{u_2(t) - 2u_1(t) + \overbrace{u_0(t)}^{d_0(t)}}{h_x^2} + G(x_1, t) = \frac{u_2(t) - 2u_1(t)}{h_x^2} + G(x_1, t) + \frac{d_0(t)}{h_x^2}$$

$$u'_2(t) = \frac{u_3(t) - 2u_2(t) + u_1(t)}{h_x^2} + G(x_2, t)$$

$$u'_3(t) = \frac{\overbrace{u_4(t)}^{d_1(t)} - 2u_3(t) + u_2(t)}{h_x^2} + G(x_3, t) = \frac{-2u_3(t) + u_2(t)}{h_x^2} + G(x_3, t) + \frac{d_1(t)}{h_x^2}$$

Equazione del calore.

Il sistema differenziale (3) può essere riscritto matricialmente.

Posto

$$\mathbf{u}(t) := [u_1(t), \dots, u_{m-1}(t)]^T$$

$$\mathbf{u}_0 := [f(x_1), \dots, f(x_{m-1})]^T$$

$$\mathbf{g}(t) := \left[\frac{1}{h_x^2} d_0(t), 0, \dots, 0, \frac{1}{h_x^2} d_1(t) \right]^T + [G(x_1, t), \dots, G(x_{m-1}, t)]^T$$

$$A = \frac{1}{h_x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

otteniamo che (3) è equiv. al sistema di eq. differenziali (lineari)

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t), \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (5)$$

Equazione del calore.

Nota.

Osserviamo che la matrice a predominanza diagonale

$$A = \frac{1}{h_x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

è

- A è simm. definita **negativa** per i teoremi di Gershgorin.
- Si mostra che se $A \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$, allora i suoi autov. sono

$$-\frac{2 - 2\cos(\frac{j\pi}{m})}{h_x^2} = -2m^2 \frac{1 - \cos(\frac{j\pi}{m})}{m^2 h_x^2} = -2m^2 (1 - \cos(\frac{j\pi}{m})).$$

- Diagonalizzabile e $I - h_t A$ è invertibile (A è def. negativa).

Equazione del calore.

Nota.

Sotto ipotesi opportune di regolarità delle funzioni d_0 , d_1 , G , f , si può mostrare che

$$\max_{j=0,\dots,m} \max_{t \in [0, T]} |y(x_j, t) - u_j(t)| \leq C_T h_x^2$$

con C_T indipendente da h_x .

Equazione del calore.

Tra i metodi più comuni nel risolvere il problema differenziale (di Cauchy)

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = F(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (7)$$

citiamo il metodo di **Eulero esplicito** (posto $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1})$)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + hF(t_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{u}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (8)$$

e quello di **Eulero implicito**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + hF(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{u}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (9)$$

Equazione del calore.

Nel nostro caso

$$F(t, \mathbf{v}(t)) := A\mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(t)$$

e quindi il metodo di **Eulero esplicito** genera la successione

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t(A\mathbf{v}_n + \mathbf{g}(t_n)) \\ \mathbf{v}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (10)$$

mentre **Eulero implicito** determina

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t(A\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{g}(t_{n+1})) \\ \mathbf{v}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (11)$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} (I - h_t A)\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t \mathbf{g}(t_{n+1}) \\ \mathbf{v}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (12)$$

Equazione del calore.

Nota.

Osserviamo che a differenza del metodo esplicito, poichè

$$\begin{cases} (I - h_t A) \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t \mathbf{g}(t_{n+1}) \\ \mathbf{v}_0 \text{ assegnato} \end{cases} \quad (13)$$

ad ogni iterazione si richiede la soluzione di un'equazione (che nel nostro caso è lineare). Usando i primi due teoremi di Gerschgorin, si vede che $(I - \gamma A)$ è **definita positiva** per $\gamma \geq 0$ (e quindi non singolare).

A partire da Eulero esplicito ed Eulero implicito si definiscono i cosiddetti **θ -metodi** in cui, con $\mathbf{v}_0$ assegnato,

$$\mathbf{v}_{n+1} = (1 - \theta) (\mathbf{v}_n + h_t (\mathbf{A} \mathbf{v}_n + \mathbf{g}(t_n))) + \theta (\mathbf{v}_n + h_t (\mathbf{A} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{g}(t_{n+1})))$$

Per

- $\theta = 0$ si ottiene il metodo di **Eulero esplicito**;
- $\theta = 1$ si ottiene il metodo di **Eulero implicito**;
- $\theta = 1/2$ si ottiene il metodo di **Crank-Nicolson**.

Consideriamo l'equazione del calore nel caso $G \equiv 0$, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = d_0(t), \quad u(1, t) = d_1(t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (14)$$

Si dimostra che, se $d_0(t), d_1(t) = 0$, la soluzione esatta tende a 0 e quindi si richiede che la soluzione numerica abbia la stessa proprietà. In tal caso la soluzione si dice **assolutamente stabile**.

Il problema continuo viene discretizzato come proposto precedentemente, ottenendo il sistema differenziale

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (15)$$

che è possibile risolvere con un generico θ -metodo

$$\mathbf{v}_{n+1} = (1 - \theta)(\mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_n) + \theta(\mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_{n+1}) \quad (16)$$

con $\mathbf{v}_0$ assegnato.

Stabilità Eulero esplicito

Nel caso di Eulero esplicito abbiamo

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_n = (I + h_t A) \mathbf{v}_n \quad (17)$$

Siccome A è diagonalizzabile, abbiamo che per qualche S , $A = S^{-1} \Lambda S$, con Λ diagonale. Posto $\mathbf{u}_n = S \mathbf{v}_n$, osserviamo che

$$\mathbf{u}_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_n \rightarrow 0.$$

Infatti

$$\|\mathbf{u}_n\| = \|S \mathbf{v}_n\| \leq \|S\| \|\mathbf{v}_n\|$$

implica che se $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$ allora $\mathbf{u}_n \rightarrow 0$. Viceversa

$$\|\mathbf{v}_n\| = \|S^{-1} \mathbf{u}_n\| \leq \|S^{-1}\| \|\mathbf{u}_n\|$$

implica che se $\mathbf{u}_n \rightarrow 0$ allora $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$.

Stabilità Eulero esplicito

Da

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+1} &= S\mathbf{v}_{n+1} = S(\mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_n) = \mathbf{u}_n + h_t S A \mathbf{v}_n \\ &= \mathbf{u}_n + h_t S S^{-1} \Lambda S \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n + h_t \Lambda \mathbf{u}_n = (I + h_t \Lambda) \mathbf{u}_n.\end{aligned}$$

se $\mathbf{u}_n = (u_{n,i})_i$, $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$, essendo Λ diagonale, la i -sima equazione diventa

$$u_{n+1,i} = (1 + h_t \lambda_i) u_{n,i}$$

e di conseguenza

$$u_{n+1,i} = (1 + h_t \lambda_i) u_{n,i} = \dots = (1 + h_t \lambda_i)^{n+1} u_{0,i}$$

e quindi $\mathbf{u}_n \rightarrow 0$ se e solo se

$$|1 + h_t \lambda_i| < 1, i = 1, \dots, m-1.$$

Stabilità Eulero esplicito

La condizione $|1 + h_t \lambda_i| < 1$ pone i vincoli sul passo

$$h_t \leq \frac{2}{|\lambda_i|}, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Essendo

$$\lambda_j = -\frac{2 - 2\cos(\frac{j\pi}{m})}{h_x^2}, \quad j = 1, \dots, m-1$$

abbiamo che $\lambda_i < 0$ per $i = 1, \dots, m-1$ e $\max_i |\lambda_i| = |\min_i(\lambda_i)|$,

$$|\min_i(\lambda_i)| = |\lambda_{m-1}| = \left| -\frac{2 - 2\cos(\frac{(m-1)\pi}{m})}{h_x^2} \right| \approx \frac{|-4|}{h_x^2} = \frac{4}{h_x^2}$$

da cui la condizione sulla stabilità asintotica

$$h_t \leq \frac{h_x^2}{2}.$$

Stabilità Eulero implicito

Nel caso di Eulero implicito abbiamo

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_{n+1} \quad (18)$$

da cui immediatamente

$$\mathbf{v}_{n+1} = (I - h_t A)^{-1} \mathbf{v}_n \quad (19)$$

Siccome A è diagonalizzabile, abbiamo che per qualche S , $A = S^{-1} \Lambda S$, con Λ diagonale. Posto $\mathbf{u}_n = S \mathbf{v}_n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= S \mathbf{v}_{n+1} = S(I - h_t A)^{-1} \mathbf{v}_n = S(S^{-1} S - h_t S^{-1} \Lambda S)^{-1} \mathbf{v}_n \\ &= S(S^{-1}(I - h_t \Lambda)S)^{-1} \mathbf{v}_n = S S^{-1} (I - h_t \Lambda)^{-1} S \mathbf{v}_n \\ &= (I - h_t \Lambda)^{-1} \mathbf{u}_n. \end{aligned} \quad (20)$$

Se $\mathbf{u}_n = (u_{n,i})_i$, $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$, la i -sima equazione diventa

$$u_{n+1,i} = (1 - h_t \lambda_i)^{-1} u_{n,i}$$

e quindi, da

$$u_{n+1,i} = (1 - h_t \lambda_i)^{-1} u_{n,i} = \dots = (1 - h_t \lambda_i)^{-(n+1)} u_{0,i}$$

il metodo converge asintoticamente a 0 se e solo se

$|1/(1 - h_t \lambda_i)| < 1, \quad i = 1, \dots, m-1.$

Stabilità Eulero implicito

Siccome A è definita negativa e simile a Λ , abbiamo che $\lambda_i < 0$ e quindi

$$|1/(1 - h_t \lambda_i)| < 1.$$

è verificata per qualsiasi scelta di h_t .

Questo significa che **qualsiasi sia h_t** , la successione del metodo di Eulero implicito converge asintoticamente a 0, come la soluzione dell'equazione del calore.

Stabilità Crank-Nicolson

Nel caso di Crank-Nicolson abbiamo

$$\mathbf{v}_{n+1} = (1/2)(\mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_{n+1}) + (1/2)(\mathbf{v}_n + h_t A \mathbf{v}_n) \quad (21)$$

da cui immediatamente

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1/2)h_t A \mathbf{v}_{n+1} + (1/2)h_t A \mathbf{v}_n \quad (22)$$

cioè

$$(I - \frac{h_t}{2} A) \mathbf{v}_{n+1} = (1 + \frac{h_t}{2} A) \mathbf{v}_n \quad (23)$$

ovvero, essendo $I - \frac{h_t}{2} A$ invertibile poichè definita positiva,

$$\mathbf{v}_{n+1} = (I - \frac{h_t}{2} A)^{-1} (I + \frac{h_t}{2} A) \mathbf{v}_n. \quad (24)$$

Essendo $A = S^{-1} \Lambda S$, con Λ diagonale, posto $\mathbf{u}_n = S \mathbf{v}_n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= S \mathbf{v}_{n+1} = S (I - \frac{h_t}{2} A)^{-1} (I + \frac{h_t}{2} A) \mathbf{v}_n \\ &= S (I - \frac{h_t}{2} A)^{-1} S^{-1} S (I + \frac{h_t}{2} A) S^{-1} S \mathbf{v}_n \\ &= \left(S (I - \frac{h_t}{2} A) S^{-1} \right)^{-1} (I + \frac{h_t}{2} \Lambda) \mathbf{u}_n = (I - \frac{h_t}{2} \Lambda)^{-1} (I + \frac{h_t}{2} \Lambda) \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Stabilità Crank-Nicolson

Da

$$\mathbf{u}_{n+1} = (1 - \frac{h_t}{2}\Lambda)^{-1}(1 + \frac{h_t}{2}\Lambda)\mathbf{u}_n$$

la i -esima equazione diventa

$$u_{n+1,i} = \frac{1 + \frac{h_t}{2}\lambda_i}{1 - \frac{h_t}{2}\lambda_i} u_{n,i}$$

e quindi

$$u_{n+1,i} = \frac{1 + \frac{h_t}{2}\lambda_i}{1 - \frac{h_t}{2}\lambda_i} u_{n,i} = \dots = \left(\frac{1 + \frac{h_t}{2}\lambda_i}{1 - \frac{h_t}{2}\lambda_i} \right)^{n+1} u_{0,i}$$

e come nel caso scalare converge a 0 se e solo se

$$\frac{|1 + \frac{h_t}{2}\lambda_i|}{|1 - \frac{h_t}{2}\lambda_i|} < 1$$

che è sempre verificata poichè $\lambda_i < 0$.

Visto che $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$ se e solo $\mathbf{u}_n \rightarrow 0$, la successione del metodo di Crank-Nicolson converge asintoticamente a 0, come la soluzione dell'equazione del calore, senza condizioni su h_t .

Facoltativo. Stabilità

Nota.

Si dimostra che le matrici dei sistemi lineari dei metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicolson sono molto meglio condizionate della matrice A del sistema differenziale. Infatti essendo

$$\lambda_{\min}(A) \approx -4/h_x^2$$

ed essendo $1 - \cos(x) \approx x^2/2$ per $x \approx 0$, $mh_x = 1$,

$$\lambda_{\max}(A) = -\frac{2(1 - \cos(\pi/m))}{h_x^2} \approx -\frac{2(\pi/m)^2}{2h_x^2} = -\pi^2$$

da cui $\text{cond}_2(A) \approx \frac{4}{\pi^2 h_x^2}$ mentre

$$\text{cond}_2(1 - h_t A) = \frac{1 - h_t \lambda_{\min}(A)}{1 - h_t \lambda_{\max}(A)} \approx \frac{1 + 4h_t/h_x^2}{1 + h_t \pi^2} \approx 1 + 4h_t/h_x^2.$$

Nota.

Quanto visto, presuppone che nell'equazione del calore sia $g \equiv 0$, ma una analisi simile può essere effettuata anche per il caso in cui $g \neq 0$.