

Equazioni differenziali ordinarie

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

24 maggio 2016

Problema di Cauchy

Problema. (Problema di Cauchy)

Si determini la funzione y tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

*dove f è a valori in $\mathbb{R}^n$ e definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,
con $(x_0, y_0) \in \Omega$.*

Nota.

Di seguito supporremo che tale problema abbia una sola soluzione.

Esempi

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), & x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

la cui soluzione è $\exp(x)$, è un problema di Cauchy con $f(x, y(x)) = y(x)$.

Esempio

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x), & x \geq 0 \\ y_2'(x) = y_1(x), & x \geq 0 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

la cui soluzione è $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (\cos(x), \sin(x))$, è un problema di Cauchy con $y = (y_1, y_2)$, $x_0 = 0$, $y(x_0) = (1, 0)$ e

$$f(x, y(x)) = f(x, y_1(x), y_2(x)) = (-y_2(x), y_1(x)).$$

Teoremi di Cauchy

Teorema (Cauchy in piccolo, [2, p.7])

Si supponga che

- *D sia un aperto connesso di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;*
- *$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua in D ;*
- *(t_0, y_0) un punto interno a D ;*
- *la funzione f verifichi la condizione di Lipschitz*

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| \leq K \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, (t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D.$$

per qualche $K \geq 0$.

*Allora **esiste** un'unica funzione $\mathbf{y}$ definita su un intervallo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, per qualche $\alpha > 0$ tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Teoremi di Cauchy

Teorema (Cauchy in grande, [4, p.331])

Sia $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $f(t, \mathbf{y})$, $t \in [a, b]$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ continua nella prima variabile,
- soddisfi rispetto alla seconda variabile la condizione di Lipschitz

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| \leq K \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, t \in [a, b], \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

per qualche norma vettoriale $\|\cdot\|$ e $K \geq 0$.

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (5)$$

ha **una e una sola** soluzione $\mathbf{y}$ in $[a, b]$, per un arbitrario $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.
Inoltre $\mathbf{y}$ dipende con continuità da t_0 e $\mathbf{y}_0$.

Teoremi di Cauchy

Nota.

- *Nel teorema di Cauchy in piccolo si fornisce un teorema di esistenza e unicità locale.*
- *Nel teorema di Cauchy in grande si fornisce un teorema di esistenza e unicità globale.*

Nota. (Soluzioni multiple)

Esistono casi in cui il problema di Cauchy ha soluzioni multiple. Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{y(x)}, & x > 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ha per soluzioni, per $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$y(x) = \begin{cases} y(x) = (x - \alpha)^2, & x \geq \alpha \\ y(x) = 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7)$$

Metodo di Eulero esplicito

Indichiamo con $\mathcal{I}(x, \bar{x})$ il più piccolo intervallo aperto contenente x e $\bar{x}$ (cioè $(x, \bar{x})$ oppure $(\bar{x}, x)$). Assumendo che la soluzione sia sufficientemente regolare, abbiamo dalla formula di Taylor per $x \approx \bar{x}$, $\xi \in \mathcal{I}(x, \bar{x})$ e (1)

$$\begin{aligned}y(x) &= y(\bar{x}) + y'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{y''(\xi)(x - \bar{x})^2}{2} \\&\approx y(\bar{x}) + y'(\bar{x})(x - \bar{x}) = y(\bar{x}) + f(\bar{x}, y(\bar{x}))(x - \bar{x}) \quad (8)\end{aligned}$$

cioè

$$y(x) \approx y(\bar{x}) + f(\bar{x}, y(\bar{x}))(x - \bar{x})$$

Di conseguenza se si desidera calcolare la soluzione nei punti

$x_{k+1} = x_0 + kh = x_k + h$ con $k > 0$, ponendo $x = x_{k+1}$, $\bar{x} = x_k$

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k)). \quad (9)$$

Metodo di Eulero esplicito

Metodo (Eulero esplicito, 1768-1770)

Tale metodo consiste nell'approssimare $y(x_{k+1})$ con u_{k+1} dove

$$u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_k, u_k), \quad u_0 = y(x_0), \quad (10)$$

ove $h = x_{k+1} - x_k$.

Teorema (Errore Eulero esplicito)

Se l'unica soluzione y del problema di Cauchy in $[a, b]$ è sufficientemente regolare in $[x_k, x_{k+1}] \subseteq [a, b]$ e $u_k = y(x_k)$ allora

$$y(x_{k+1}) - u_{k+1} = \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \quad (11)$$

per qualche $\xi \in (x_k, x_{k+1})$.

Metodo di Eulero esplicito

Dimostrazione.

Essendo

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$

da

- $u_k = y(x_k)$,
- $u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_k, u_k) = y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$,
- in virtù del fatto che $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$,

si ha per qualche ξ in (x_k, x_{k+1})

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) - u_{k+1} &= y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\ &\quad - (y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k)) \\ &= \frac{y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2}. \end{aligned}$$



Metodo di Eulero implicito

Similmente al caso di Eulero esplicito, da

$$y(x) \approx y(\bar{x}) + f(\bar{x}, y(\bar{x}))(x - \bar{x})$$

se poniamo $x = x_k$, $\bar{x} = x_{k+1}$ abbiamo

$$y(x_k) \approx y(x_{k+1}) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))(x_k - x_{k+1}), \quad (12)$$

e quindi

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h \cdot f(x_{k+1}, y(x_{k+1})). \quad (13)$$

Metodo (Metodo di Eulero implicito)

Tale metodo consiste nell'approssimare $y(x_{k+1})$ con u_{k+1} definito da

$$u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_{k+1}, u_{k+1}), \quad u_0 = y(x_0) \quad (14)$$

Eulero implicito

Nota. (Risoluzione equazioni nonlineari)

Evidentemente ad ogni iterazione si richiede di risolvere un'equazione nonlineare nella variabile z del tipo

$$z = u_k + h \cdot f(x_{k+1}, z)$$

la cui soluzione può essere calcolata utilizzando ad esempio

- *col metodo di Newton o*
- *del punto fisso o*
- *delle secanti.*

Nota. (Metodi di Eulero e sistemi di equazioni differenziali)

Il problema di Cauchy è definito da

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (15)$$

dove f è a valori in $\mathbb{R}^n$ e definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Nei **casi multivariati** con $n > 1$, indipendentemente dalla derivazione dovuta alla espansione di Taylor, i metodi

- **Eulero esplicito:** $u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_k, u_k)$, $u_0 = y(x_0)$
- **Eulero implicito:** $u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_{k+1}, u_{k+1})$, $u_0 = y(x_0)$,

possono essere utilizzati, in quanto la sequenza è ben definita.

Linear Multistep Methods

Definizione (Linear Multistep Methods)

Sono i metodi che approssimano $y(x_k)$ con u_k , dove $x_k = x_0 + kh$ e

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j})$$

Nota.

Si osservi che

- *Sono metodi per cui se voglio calcolare u_{n+1} necessitano $u_{n-p}, \dots, u_n$ (si chiamano **metodi a $p + 1$ passi**). Siccome inizialmente si dispone solo di u_0 , per calcolare $u_1, \dots, u_p$, necessari ad innescare il metodo, si utilizzano di solito altre strategie (come ad esempio applicare più volte metodi a un passo, cioè in cui $p = 0$, come ad esempio Eulero implicito).*
- *Se $b_{-1} = 0$ allora il metodo è esplicito, altrimenti è implicito.*

Analisi convergenza

Nota.

Osserviamo che il metodo di Eulero esplicito

$$u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_k, u_k)$$

e Eulero implicito

$$u_{k+1} = u_k + h \cdot f(x_{k+1}, u_{k+1})$$

hanno la forma

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j})$$

ponendo rispettivamente

- *Eulero esplicito:* $p = 0$, $a_0 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$,
- *Eulero implicito:* $p = 0$, $a_0 = 1$, $b_{-1} = 1$, $b_0 = 0$.

Analisi convergenza

Definizione (Convergenza)

Supponiamo di analizzare il problema di Cauchy nell'intervallo compatto $I = [x_0, x_{fin}]$. Siano $x_s = x_0 + sh$, con $Nh_N = x_{fin} - x_0$,

- $y^{(h_N)} = \{y(x_k)\}$ la soluzione esatta di un fissato problema di Cauchy,
- $u^{(h_N)} = \{u_k\}$ dove u_k è l'approssimazione di $y(x_k)$ fornita nei punti x_k da un metodo numerico a $p + 1$ passi.

Un metodo Linear Multistep a $p + 1$ passi si dice **convergente** se qualora i passi iniziali $u_0^{(h_N)}, \dots, u_p^{(h_N)}$ sono tali che

$$\eta(h_N) = \max_{0 \leq k \leq p} |y^{(h_N)}(x_0 + kh) - u_k^{(h_N)}| \rightarrow 0 \text{ per } h_N \rightarrow 0$$

si ha che

$$\|y^{(h_N)} - u^{(h_N)}\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ per } h_N \rightarrow 0.$$

Se qualora $\eta(h_N) \leq C_1 h^q$ implica $\|y^{(h_N)} - u^{(h_N)}\|_{\infty} \leq C_2 h^q$, con C_1, C_2 indipendenti da h , allora il metodo si dice convergente con ordine q .

Analisi convergenza

Definizione (Errori di troncamento, [2], p.112)

Se un metodo per la soluzione di problemi di Cauchy ha la forma

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j})$$

ove $u_n \approx y(t_n)$, y soluzione di (1) in $t_n = x_0 + nh$, e sia

$$\tau_n(h) = \frac{1}{h} \cdot \left(y(x_{n+1}) - \left(\sum_{j=0}^p a_j y(x_{n-j}) + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) \right) \right).$$

- La quantità $\tau_n(h)$ chiama **errore locale di troncamento** del metodo.
- La quantità $\tau(h) = \max_{n=0,\dots} |\tau_n(h)|$ si chiama **errore globale di troncamento** del metodo.
- Un metodo per cui $\tau(h)$ tende a 0, quando $h \rightarrow 0$ si dice **consistente**.

Analisi convergenza

Nota.

La consistenza rende conto di come la soluzione y del problema di Cauchy verifichi lo schema discreto del metodo linear multistep.

Nota.

In queste note ci interesseremo esclusivamente della convergenza e consistenza di metodi linear multistep, ma esistono definizioni che permettono l'analisi di altri metodi non rientranti in questa famiglia.

Nota.

Un teorema dovuto a Lax/Dahlquist, mostra che un metodo è convergente se e solo se consistente e stabile. Un metodo Linear Multistep a $p + 1$ passi si dice (zero-)stabile per un certo problema di Cauchy nel compatto $[x_0, x_{fin}]$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste h tale che se $h_N \leq h$ e

$$\max_{k=0, \dots, p-1} |u_k^{(h_N)} - y(x_0 + kh_N)| \leq \epsilon$$

allora

$$\|u_k^{(h_N)} - y(x_0 + kh_N)\|_{\infty} \leq K\epsilon$$

con K indipendente da h .

Analisi convergenza

Di seguito intendiamo mostrare, sotto opportune ipotesi, la **convergenza del metodo di Eulero esplicito**.

Consideriamo il metodo di Eulero esplicito, con $x_n = x_0 + nh$ per un prefissato passo $h = (x_{fin} - x_0)/N$. Sia y soluzione del problema di Cauchy, e

$$\bar{u}_n = y(x_{n-1}) + h \cdot f(x_{n-1}, y(x_{n-1})),$$

$$u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1}).$$

Osserviamo che

- la prima sequenza $\bar{u}^{(h)} = \{\bar{u}_n\}$, ha il generico $\bar{u}_n$ ottenuto applicando il metodo di Eulero esplicito partendo dal valore assunto dalla soluzione y in ogni x_{n-1} ,
- la seconda sequenza $u^{(h)} = \{u_n\}$, ha il generico u_n ottenuto applicando il metodo di Eulero esplicito partendo dal valore assunto u_{n-1} , che a priori non coincide con $y(x_{n-1})$.

Da

$$e_n = y(x_n) - u_n = (y(x_n) - \bar{u}_n) + (\bar{u}_n - u_n) \quad (16)$$

per la disuguaglianza triangolare

$$|e_n| \leq |y(x_n) - \bar{u}_n| + |\bar{u}_n - u_n|.$$

Analisi convergenza

Analizziamo il primo termine $|y(x_n) - \bar{u}_n|$. Se la derivata seconda di y esiste ed è continua allora abbiamo per il teorema di Weierstrass

$$\max_{x \in [x_0, x_{fin}]} |y''(x)| \leq M$$

e quindi per $\xi_n \in (x_{n-1}, x_n)$,

$$|y(x_n) - \bar{u}_n| = (h^2/2) \cdot |y''(\xi_n)| \leq Mh^2/2.$$

Di conseguenza,

$$h|\tau_n(h)| = \max_{n=0, \dots, N} |y(x_n) - \bar{u}_n| \leq Mh^2/2.$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Sketch della dimostrazione (supposto y suff. regolare e f continua e L -lipschitziana):

- 1 $|e_n| \leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0|;$
- 2 $1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1} \leq \frac{\exp(L(x_{fin} - x_0))}{hL}$ e
 $(1 + hL)^n \leq \exp(L(x_{fin} - x_0));$
- 3 conclusione perchè secondo membro infinitesimo per $h \rightarrow 0$ e $|e_0| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$.

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Se f è **L-Lipschitziana** (rispetto al secondo argomento) allora

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

e otteniamo, ricordando che $e_n := y(x_n) - u_n$,

$$|\bar{u}_n - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|.$$

Infatti da

$$\bar{u}_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y(x_{n-1})), \quad u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1})$$

ricaviamo dalla L -lipschitzianità

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n - u_n| &= |(y(x_{n-1}) + h \cdot f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))) - (u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1}))| \\ &= |(y(x_{n-1}) - u_{n-1}) + h \cdot (f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) - f(x_{n-1}, u_{n-1}))| \\ &\leq |y(x_{n-1}) - u_{n-1}| + h|f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) - f(x_{n-1}, u_{n-1})| \\ &\leq |y(x_{n-1}) - u_{n-1}| + hL|y(x_{n-1}) - u_{n-1}| = (1 + hL)|y(x_{n-1}) - u_{n-1}| \\ &= (1 + hL)e_{n-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Da

- $e_n := y(x_n) - u_n = (y(x_n) - \bar{u}_n) + (\bar{u}_n - u_n),$
- $|y(x_n) - \bar{u}_n| \leq h|\tau(h)|,$
- $|\bar{u}_n - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|$

si deduce

$$\begin{aligned} |e_n| &= |(y(x_n) - \bar{u}_n) + (\bar{u}_n - u_n)| \\ &\leq |y(x_n) - \bar{u}_n| + |\bar{u}_n - u_n| \\ &\leq h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-1}| \end{aligned} \tag{18}$$

e quindi, ricordando che $e_n := y(x_n) - u_n$,

$$|e_n| \leq h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-1}|.$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Quindi essendo

- $|e_0| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$,
- $|e_n| \leq h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-1}|$,

ricaviamo

$$\begin{aligned}|e_n| &\leq h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-1}| \\ &\leq h|\tau(h)| + (1 + hL)(h|\tau(h)| + (1 + hL)|e_{n-2}|) \\ &= (1 + (1 + hL))h|\tau(h)| + (1 + hL)^2|e_{n-2}| \\ &\leq \dots \\ &\leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0|\end{aligned}$$

e cioè

$$|e_n| \leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0|.$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Ricordando che

$$1 + s + \dots + s^k = \frac{(1 - s^{k+1})}{(1 - s)}$$

posto $s = hL$ deduciamo che

$$1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1} = \frac{1 - (1 + hL)^n}{1 - (1 + hL)} = \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL}.$$

Notiamo che per $\gamma > 0$

$$\exp(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^1 \frac{\gamma^k}{k!} = 1 + \gamma \quad (19)$$

e quindi $(1 + \gamma)^n \leq (\exp(\gamma))^n = \exp(n\gamma)$ implica che per $\gamma = hL$ si ha essendo $nh = x_n - x_0$

$$(1 + hL)^n \leq \exp(nhL) = \exp(L(x_n - x_0)) \leq \exp(L(x_{fin} - x_0)).$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Da

- $1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1} = \frac{1 - (1 + hL)^n}{1 - (1 + hL)} = \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL}$
- $(1 + hL)^n \leq \exp(L(x_{fin} - x_0))$,

concludiamo che

$$\begin{aligned} 1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1} &= \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} \leq \frac{\exp(L(x_{fin} - x_0)) - 1}{hL} \\ &\leq \frac{\exp(L(x_{fin} - x_0))}{hL} \end{aligned} \quad (20)$$

e quindi

$$\begin{aligned} (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| &\leq \frac{\exp(L(x_{fin} - x_0))}{hL} h|\tau(h)| \\ &= \exp(L(x_{fin} - x_0))|\tau(h)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso Lipschitziano

Di conseguenza da

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})h|\tau(h)| + (1 + hL)^n|e_0| \\ &\leq \exp(L(x_{fin} - x_0))|\tau(h)| + \exp(L(x_{fin} - x_0))|e_0| \\ &\leq \exp(L(x_{fin} - x_0))\frac{Mh^2}{2} + \exp(L(x_{fin} - x_0))|e_0| \end{aligned} \quad (21)$$

visto che il secondo membro non dipende da n ricaviamo

$$\max_{n=0,\dots,N} |e_n| \leq \exp(L(x_{fin} - x_0))\frac{Mh^2}{2} + \exp(L(x_{fin} - x_0))|e_0|$$

e quindi il metodo di Eulero esplicito risulta convergente, visto che il secondo membro è infinitesimo.

Metodo di Crank-Nicolson

Supponiamo di dover risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (22)$$

Osserviamo che se $x_{n+1} = x_0 + nh$ allora ricordando la formula del trapezio per il calcolo di integrali

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \\ &\approx y(x_n) + (h/2)(y'(x_{n+1}) + y'(x_n)) \\ &= y(x_n) + (h/2)(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))). \end{aligned}$$

Nota.

Utilizzando rispettivamente le formule dei rettangoli,

$$\int_a^b g(x) dx \approx (b-a)g(a), \quad \int_a^b g(x) dx \approx (b-a)g(b)$$

si possono ottenere similmente i metodi di Eulero esplicito e implicito.

Metodo di Crank-Nicolson

Essendo

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + (h/2)(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))) \quad (23)$$

si introduce il metodo di Crank-Nicolson (1947):

Metodo (Crank-Nicolson o dei trapezi)

Tale metodo consiste nell'approssimare $y(x_{n+1})$ con u_{n+1} dove

$$u_{n+1} = u_n + (h/2)(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \quad (24)$$

con $u_0 = y_0$.

Si osservi che ad ogni iterazione, essendo il metodo implicito, bisogna risolvere una equazione nonlineare.

Assoluta stabilità

Nell'ambito delle equazioni differenziali ordinarie, esistono vari criteri di stabilità. Un classico problema è quello di vedere se un metodo è **assolutamente stabile**. Definito il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), & x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (25)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Re(\lambda) < 0$, visto che l'unica soluzione è $y(x) = \exp(\lambda x)$ si cerca di definire il passo h cosicchè il metodo numerico per la soluzione del problema di Cauchy (1) abbia lo stesso comportamento asintotico di $\exp(\lambda x)$.

La **regione di assoluta stabilità** è composta dagli $h\lambda$, per cui il metodo numerico con passo h è tale da avere lo stesso comportamento asintotico del problema di Cauchy (25) relativo al parametro λ (con $\Re(\lambda) < 0$).

Assoluta stabilità. Una nota.

Nota.

Stabilire la stabilità per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (26)$$

è in generale complicato. Se invece consideriamo

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + g(x), & x \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (27)$$

la questione è più semplice. Ricordiamo che la soluzione di (27) è

$$y(x) = c \cdot \exp(\lambda x) + \int_0^x \exp(\lambda(x-t))g(t)dt$$

con

$$c = y_0$$

(cf. [1, p.369]).

Assoluta stabilità. Una nota.

Sia y la soluzione di

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + g(x), & x \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (28)$$

e y_ϵ quella di

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + g(x), & x \geq 0 \\ y(0) = y_0 + \epsilon \end{cases} \quad (29)$$

Posto $z_\epsilon = y_\epsilon - y$, da (28), (30),

$$\begin{cases} z'_\epsilon(x) = \lambda z_\epsilon(x), & x \geq 0 \\ z_\epsilon(0) = \epsilon \end{cases} \quad (30)$$

la cui soluzione è $z_\epsilon = \epsilon \cdot \exp(\lambda x)$.

Di solito nelle applicazioni ci si interessa al caso $\lambda < 0$ o complesso con parte reale negativa. In questi casi $z_\epsilon \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e quindi l'effetto delle perturbazioni si annulla per valori grandi di x .

Si desidera che il metodo numerico goda delle stesse proprietà e la risposta la si ha nuovamente dallo studio della regione di stabilità.

Assoluta stabilità: Eulero esplicito

Definizione (Problema stiff)

Un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), & x \geq 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (31)$$

si dice **stiff**, quando $\Re(\lambda) \ll 0$ (cioè $\Re(\lambda)$ è molto grande in valore assoluto).

Assoluta stabilità

Ricordiamo a tal proposito che dalla formula di Eulero, se $z = a + ib = \Re(z) + \Im(z)$ allora

$$\exp(z) = \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Quindi se $\Re(\lambda) < 0$, visto che $|\cos(\Im(\lambda x)) + i \sin(\Im(\lambda x))| = 1$ e $x > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} |\exp(\lambda x)| &= |\exp(\Re(\lambda x))| |\cos(\Im(\lambda x)) + i \sin(\Im(\lambda x))| \\ &= |\exp(\Re(\lambda x))| \rightarrow 0, \text{ per } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Visto il comportamento asintotico di $\exp(\lambda x)$, se u_n è l'approssimazione della soluzione in $x_n = x_0 + nh$ fornita da un metodo numerico a passo h , si desidera sia $u_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Assoluta stabilità: Eulero esplicito

Nel caso del metodo di Eulero esplicito,

$$u_n = u_{n-1} + hf(x_{n-1}, u_{n-1}) = (1 + h\lambda)u_{n-1}, \quad u_0 = 1.$$

Si verifica facilmente che questa equazione alle differenze (di ordine 1) ha quale unica soluzione

$$u_n = (1 + h\lambda)^n$$

e che

$$u_n \rightarrow 0 \text{ se e solo se } |1 + h\lambda| < 1$$

il che significa che $h\lambda$ deve stare nel disco del piano complesso di centro -1 e raggio 1.

Assoluta stabilità: Eulero esplicito

Di conseguenza, fissato λ , il metodo risulta stabile se e solo se si sceglie un passo sufficientemente piccolo, cioè minore di $1/|\lambda|$.

Nel caso di problemi stiff, cioè con $\Re(\lambda) \ll 0$, si deve scegliere un passo h molto piccolo affinché la soluzione di Eulero esplicito tenda a 0.

Regione di assoluta stabilità di Eulero esplicito

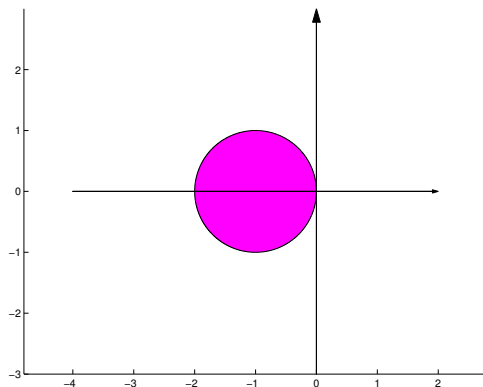


Figura : In magenta: regione di assoluta stabilità di Eulero esplicito: disco unitario centrato in $(-1, 0)$.

Assoluta stabilità: Eulero implicito

Nel caso del metodo di Eulero implicito,

$$u_n = u_{n-1} + hf(x_n, u_n) = u_{n-1} + h\lambda u_n, \quad u_0 = 1.$$

Portando a primo membro $h\lambda u_n$, dividendo i membri per $1 - h\lambda$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 - h\lambda}.$$

Si verifica, ragionando per induzione, che

$$u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}$$

e quindi che

$$u_n \rightarrow 0 \text{ se e solo se } \frac{1}{|1 - h\lambda|} < 1.$$

Assoluta stabilità: Eulero implicito

Essendo $\Re(\lambda) < 0$, si vede facilmente che $|\frac{1}{1-h\lambda}| < 1$ per qualsiasi h . Infatti, $\lambda = a + ib$ con $a < 0$, ciò è vero se e solo se

$$\frac{1}{|1 - h\lambda|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |1 - h\lambda| = \sqrt{(1 - a)^2 + b^2}$$

ovvero, elevando ai quadrati entrambi i membri, se e solo se

$$1 < (1 - a)^2 + b^2$$

ovviamente verificata in quanto $a < 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. La regione di ass. stabilità è tutto il **semipiano negativo** $\Re(h\lambda) < 0$.

Nota.

Questa proprietà suggerisce di applicare Eulero implicito invece di Eulero esplicito per risolvere numericamente un problema di Cauchy di tipo stiff.

Regione di assoluta stabilità di Eulero implicito

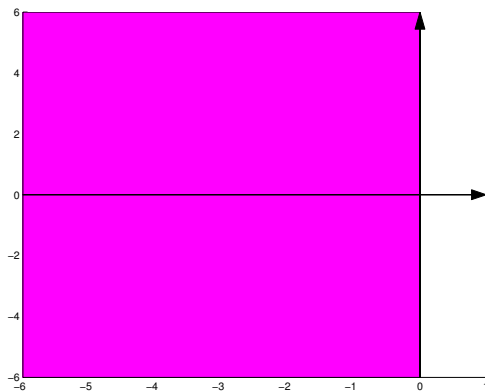


Figura : In magenta: regione di assoluta stabilità di Eulero implicito, semipiano negativo $\Re(h\lambda) < 0$.

Assoluta stabilità: metodo di Crank-Nicolson

Nel caso del metodo di Crank-Nicolson, da $f(x, y) = \lambda y$

$$\begin{aligned}u_n &= u_{n-1} + (h/2)(f(x_n, u_n) + f(x_{n-1}, u_{n-1})) \\&= u_{n-1} + (h/2)\lambda(u_n + u_{n-1}), \quad u_0 = 1\end{aligned}\tag{32}$$

Quindi,

$$\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)u_n = u_{n-1} + \frac{h\lambda}{2}u_n$$

cioè

$$\frac{2 - h\lambda}{2} \cdot u_n = \frac{2 + h\lambda}{2} \cdot u_{n-1}$$

e di conseguenza

$$u_n = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} u_{n-1}$$

Assoluta stabilità: metodo di Crank-Nicolson

Da

$$u_n = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} u_{n-1}$$

si verifica facilmente che questa equazione alle differenze ha quale unica soluzione

$$u_n = \frac{(2 + h\lambda)^n}{(2 - h\lambda)^n}$$

e che

$$u_n \rightarrow 0 \text{ se e solo se } \frac{|2 + h\lambda|}{|2 - h\lambda|} < 1.$$

Da $\Re(\lambda) < 0$, $|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}| < 1$ per ogni h . Infatti, se $\lambda = a + ib$, $a < 0$

$$\frac{|2 + h\lambda|}{|2 - h\lambda|} = \frac{|2 + h(a + ib)|}{|2 - h(a + ib)|} = \frac{|(2 + ha) + ib|}{|(2 - ha) + ib|} = \frac{\sqrt{(2 + ha)^2 + b^2}}{\sqrt{(2 - ha)^2 + b^2}} < 1$$

in quanto $(2 + ha)^2 < (2 - ha)^2$, qualora $a < 0$.

Regione di assoluta stabilità di Crank-Nicolson

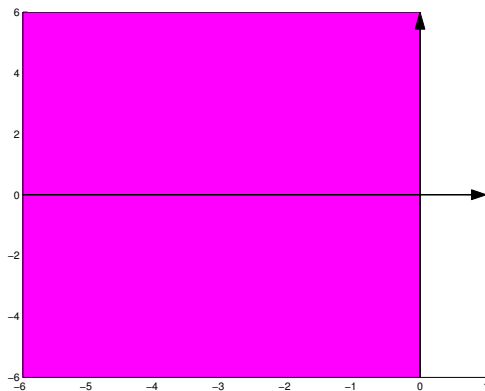


Figura : In magenta: regione di assoluta stabilità di Crank-Nicolson, semipiano negativo $\Re(h\lambda) < 0$.

Metodi linear multistep (LM)

Posto $h > 0$, $x_n = x_0 + nh$, un metodo **linear multistep** è del tipo

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j}), \quad n = p, p+1, \dots \quad (33)$$

noti i valori $u_k \approx y(x_k)$ per $k < p$ e supposto $a_p, b_p \neq 0$.

Nota.

Non è difficile vedere che

- *Eulero esplicito* ($a_0 = 1$, $b_0 = 1$),
- *Eulero implicito* ($a_0 = 1$, $b_{-1} = 1$),
- *Crank-Nicolson* ($a_0 = 1$, $b_{-1} = 1/2$, $b_0 = 1/2$)

sono metodi che hanno questa struttura.

Metodi linear multistep: Adams

Da $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} y'(x) dx$ ricaviamo che

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Se è nota una approssimazione della soluzione nei punti $x_{n+\gamma}, \dots, x_{n+\gamma-p}$ e se $\mathcal{P}_p(x)$ è il polinomio che interpola le coppie $(x_{n+\gamma-k}, f(x_{n+\gamma-k}, u_{n+\gamma-k}))$, si ha

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-m}) + \int_{x_{n-m}}^{x_{n+1}} \mathcal{P}_p(x) dx$$

e quindi facilmente un metodo per quadratura numerica dell'integrale.

- Se $m = 0$, $\gamma = 0$ si hanno metodi espliciti ([Adams-Bashforth](#), (1883));
- Se $m = 0$, $\gamma = 1$ si hanno metodi impliciti ([Adams-Moulton](#), (1926)).

Esempi LM: Adams-Bashforth

- Adams-Bashforth (p=0): $u_{n+1} = u_n + hf_n$, $\tau_{n+1} = (h^2/2)y^{(2)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=1): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$,
 $\tau_{n+1} = (5h^3/12)y^{(3)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=2): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$,
 $\tau_{n+1} = (3h^4/8)y^{(4)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=3): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$,
 $\tau_{n+1} = (251h^5/720)y^{(5)}(\xi_n)$.
- Adams-Bashforth (p=4):
 $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4})$,
 $\tau_{n+1} = (95h^6/2888)y^{(5)}(\xi_n)$.

dove τ_{n+1} è l'errore locale di troncamento

Nota.

Si noti che sono effettivamente metodi *espliciti* a $p + 1$ passi.

Esempi LM: Adams-Moulton

- Adams-Moulton (p=0): $u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$, $\tau_{n+1} = (-h^2/2)y^{(2)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=1): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$,
 $\tau_{n+1} = (-h^3/12)y^{(3)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=2): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$,
 $\tau_{n+1} = (-h^4/24)y^{(4)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=3): $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$,
 $\tau_{n+1} = (-19h^5/720)y^{(5)}(\xi_n)$.
- Adams-Moulton (p=4):
 $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3})$,
 $\tau_{n+1} = (-3h^6/160)y^{(6)}(\xi_n)$.

Nota.

Si noti che sono effettivamente metodi *impliciti* a p passi.

Teorema

Un metodo linear multistep

- è *consistente* se e solo se

$$\sum_{j=0}^p a_j = 1, \quad - \sum_{j=0}^p j a_j + \sum_{j=-1}^p b_j = 1,$$

- se $y \in C^{q+1}$ per $q \geq 1$, ha *ordine di consistenza* q se e solo se è consistente e

$$\sum_{j=0}^p (-j)^i a_j + i \sum_{j=-1}^p (-j)^{i-1} b_j = 1, \quad i = 2, \dots, q.$$

Convergenza LM

Teorema (Convergenza LM (cf.[1, p.116]))

Si supponga che

- *i dati iniziali siano calcolati in modo che*

$$\eta(h) = \max_{i=0,\dots,p} |y(x_i) - u_i| \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow 0;$$

- *il metodo sia **consistente**;*
- $a_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, p;$
- *il passo di discretizzazione h sia tale che $h \leq 1/(2c)$, dove $c = L \sum_{j=-1}^p |b_j|$ e L è la costante di Lipschitz di f .*

*Allora il metodo LM **converge** ed inoltre esistono C_1, C_2 positive tali che per ogni n*

$$|y(x_n) - u_n| \leq C_1 \eta(h) + C_2 \tau(h).$$

Se la soluzione è $m + 1$ volte derivabile con continuità, il metodo ha ordine di consistenza m e gli errori iniziali soddisfano $\eta(h) = O(h^m)$ allora il metodo è di ordine m .

Convergenza LM

Nota.

Nelle ipotesi del teorema precedente, per ricavare la convergenza chiedavamo:

- *i dati iniziali siano calcolati in modo che*

$$\eta(h) = \max_{i=0,\dots,p} |y(x_i) - u_i| \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow 0;$$

- *il metodo sia **consistente**;*
- $a_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, p;$
- *il passo di discretizzazione h sia tale che $h \leq 1/(2c)$, dove $c = L \sum_{j=-1}^p |b_j|$ e L è la costante di Lipschitz di f .*

Se prendiamo un metodo di Adams-Bashforth o Adams-Moulton di quelli esposti, sono tutti consistenti con ordine $p + 1$. Inoltre $a_0 = 1, a_1 = 0, \dots, a_p = 0$. Di conseguenza tutti i metodi esposti sono convergenti.

Se la soluzione è $p + 2$ volte derivabile con continuità, il metodo ha ordine di consistenza $p + 1$ e gli errori iniziali soddisfano $\eta(h) = O(h^m)$ allora il metodo è di ordine $p + 1$.

Convergenza LM

In particolare, nelle ipotesi richieste,

- *il metodo di **Eulero esplicito**, avendo ordine di consistenza 1, è convergente con ordine di convergenza 1;*
- *il metodo di **Eulero implicito**, avendo ordine di consistenza 1, è convergente con ordine di convergenza 1;*
- *il metodo di **Crank-Nicolson**, avendo ordine di consistenza 2, è convergente con ordine di convergenza 2.*

Definizione

Un metodo numerico è detto A-stabile se la sua regione di stabilità assoluta contiene tutto il semipiano negativo.

Valgono le seguenti **barriere di stabilità** (Dahlquist, 1963)

Teorema

Nessun metodo LM esplicito è A-stabile.

Teorema

Nessun metodo LM implicito di ordine maggiore di 2 è A-stabile.

Parte facoltativa

Gli argomenti che seguono sono facoltativi. Servono solo a dare una immagine più completa sul tema dell'analisi numerica per la risoluzione di problemi di Cauchy.

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Se f non è L -Lipschitziana ma è **L-dissipativa**, cioè

$$-L \leq \frac{\partial f}{\partial y}(\xi) \leq 0, \quad \xi \in \Omega := (x_0, x_{\text{fin}}) \times \mathbb{R}$$

abbiamo da

$$\blacksquare \bar{u}_n = y(x_{n-1}) + h \cdot f(x_{n-1}, y(x_{n-1})),$$

$$\blacksquare u_n = u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1}),$$

$$\blacksquare f(x_{n-1}, u_{n-1}) = f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(u_{n-1} - y(x_{n-1})),$$

che per qualche $\xi \in (x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{R} \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned} u_n - \bar{u}_n &= (u_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, u_{n-1})) - (y(x_{n-1}) + h \cdot f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))) \\ &= (u_{n-1} - y(x_{n-1})) + h \cdot (f(x_{n-1}, u_{n-1}) - f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))) \\ &= (u_{n-1} - y(x_{n-1})) + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(u_{n-1} - y(x_{n-1})) \\ &= (1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)) \cdot (u_{n-1} - y(x_{n-1})). \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Da

$$u_n - \bar{u}_n = (1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)) \cdot (u_{n-1} - y(x_{n-1})). \quad (34)$$

abbiamo che se $0 < h \leq 2/L$ (non restrittivo per mostrare la conv. visto che si studia il comportamento per $h \rightarrow 0$) allora da $-L \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq 0$,

$$-1 = 1 - 2L/L \leq 1 - hL \leq 1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi) \leq 1$$

e quindi $|1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)| \leq 1$ da cui

$$\begin{aligned} |u_n - \bar{u}_n| &= |1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)| \cdot |u_{n-1} - y(x_{n-1})| \\ &\leq |u_{n-1} - y(x_{n-1})| = |e_{n-1}|. \end{aligned} \quad (35)$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Da

- $e_n := y(x_n) - u_n$,
- $|y(x_n) - \bar{u}_n| \leq h|\tau(h)|$,
- $|\bar{u}_n - u_n| \leq |e_{n-1}|$,
- $|e_n| \leq h\tau(h) + |\bar{u}_n - u_n| \leq h|\tau(h)| + |e_{n-1}|$

ricaviamo, essendo $h|\tau(h)| > 0$, $e_0 = 0$, $n \leq N$, $Nh = x_{\text{fin}} - x_0$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n - u_n| &\leq |e_{n-1}| \leq h|\tau(h)| + |e_{n-1}| \\ &\leq h|\tau(h)| + (h|\tau(h)| + |e_{n-2}|) \\ &= 2h|\tau(h)| + |e_{n-2}| \\ &\leq 2h|\tau(h)| + (h|\tau(h)| + |e_{n-3}|) \\ &= 3h|\tau(h)| + |e_{n-3}| \leq \dots \\ &\leq nh|\tau(h)| + |e_0| = nh|\tau(h)| \\ &\leq Nh|\tau(h)| = (x_{\text{fin}} - x_0)|\tau(h)| \leq \frac{(x_{\text{fin}} - x_0)Mh}{2}. \end{aligned}$$

Analisi convergenza Eulero esplicito, caso dissipativo

Di conseguenza, visto che $(x_{\text{fin}} - x_0)$ non dipende da n , essendo per ogni n

$$|\bar{u}_n - u_n| \leq \frac{(x_{\text{fin}} - x_0)Mh}{2}$$

abbiamo

$$\|u^{(h)} - \bar{u}^{(h)}\|_{\infty} = \max_n |u_n - \bar{u}_n| \leq \frac{(x_{\text{fin}} - x_0)Mh}{2}.$$

Posto $C_2^*(h) = (x_{\text{fin}} - x_0)Mh/2$ abbiamo che

$$\|u^{(h)} - \bar{u}^{(h)}\|_{\infty} \leq C_2^*(h)$$

con $C_2^*(h) \rightarrow 0$ qualora $h \rightarrow 0$ e quindi il metodo di Eulero esplicito, è convergente anche nel caso in cui f sia L-dissipativa.

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Consideriamo il metodo di Eulero implicito

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_n, u_n), \quad u_0 = y_0.$$

Per prima cosa calcoliamo l'errore globale di troncamento. Se $g \in C^2(a, b)$, per qualche $\xi \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(b) - h^2 g^{(1)}(\xi)/2$$

e quindi essendo $h = x_n - x_{n-1}$, se la soluzione è suff. regolare

$$\begin{aligned} y_n &= u_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x)dx = u_{n-1} + hy'(x_n) - h^2 y''(\xi)/2 \\ &= u_{n-1} + hf(x_n, u_n) - h^2 y''(\xi)/2 \end{aligned} \tag{36}$$

e quindi

$$\tau_n(h) = (1/h) \cdot (h^2 y''(\xi)/2) = hy''(\xi)/2.$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Ricordiamo che $u_n = y(t_n)$ è la soluzione del problema di Cauchy mentre

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_n, u_n), u_0 = y_0.$$

Definiamo

$$\bar{u}_n := u_{n-1} + hf(t_n, y_n), \bar{u}_0 = y_0.$$

Come in precedenza

$$u_n - u_n = (u_n - \bar{u}_n) + (\bar{u}_n - u_n)$$

e quindi per la disuguaglianza triangolare

$$|u_n - u_n| \leq |u_n - \bar{u}_n| + |\bar{u}_n - u_n|.$$

Studiamo separatamente i termini al secondo membro.

Osserviamo che

$$|u_n - \bar{u}_n| = |u_n - (u_{n-1} + hf(t_n, y_n))| = h|\tau_n(h)|$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Studiamo $|\bar{u}_n - u_n|$ ricordando che

$$\bar{u}_n := u_{n-1} + hf(t_n, y_n), \quad \bar{u}_0 = y_0,$$

$$u_n := u_{n-1} + hf(t_n, u_n), \quad u_0 = y_0.$$

Di conseguenza, dalla lipschitzianità (rispetto la seconda variabile)

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n - u_n| &= |u_{n-1} + hf(t_n, y_n) - u_{n-1} - hf(t_n, u_n)| \\ &= |u_{n-1} - u_{n-1} + hf(t_n, y_n) - hf(t_n, u_n)| \\ &\leq |u_{n-1} - u_{n-1}| + h|f(t_n, y_n) - f(t_n, u_n)| \\ &\leq |u_{n-1} - u_{n-1}| + hL|y_n - u_n| \end{aligned} \tag{37}$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

In definitiva, essendo

$$|y(x_n) - u_n| \leq |y(x_n) - \bar{u}_n| + |\bar{u}_n - u_n|,$$

$$|y(x_n) - \bar{u}_n| = |y(x_n) - (y(x_{n-1}) + hf(t_n, y_n))| = h|\tau_n(h)|,$$

$$|\bar{u}_n - u_n| \leq |y(x_{n-1}) - u_{n-1}| + hL|y(x_n) - u_n|,$$

deduciamo che

$$|y(x_n) - u_n| \leq h|\tau_n(h)| + |y(x_{n-1}) - u_{n-1}| + hL|y(x_n) - u_n|.$$

Visto che siamo interessati ad analizzare l'errore per $h \rightarrow 0$, non è restrittivo supporre $hL < 1$ e portando $hL|y(x_n) - u_n|$ a primo membro e dividendo ambo i membri per $1 - hL > 0$ abbiamo, posto $e_n := u_n - u_n$,

$$\begin{aligned} |e_n| &= |u_n - u_n| \leq (1/(1 - hL))(h|\tau_n(h)| + |y(x_{n-1}) - u_{n-1}|) \\ &= \frac{h|\tau_n(h)|}{1 - hL} + \frac{|e_{n-1}|}{1 - hL} \end{aligned} \quad (38)$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Con ragionamenti simili a quelli utilizzati per mostrare la convergenza di Eulero esplicito, abbiamo per $s = 1/(1 - hL)$, posto $\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|$

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq sh|\tau_n(h)| + s|e_{n-1}| \\ &\leq sh|\tau_n(h)| + s(sh|\tau_{n-1}(h)| + s|e_{n-2}|) \\ &\leq \dots \\ &\leq h \sum_{k=1}^n s^k |\tau_{n-k+1}(h)| + s^n |e_0| \\ &\leq h \left(\sum_{k=1}^n s^k \right) |\tau(h)| + s^n |e_0| \end{aligned} \tag{39}$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Notiamo che se $hL < 1$ allora $s = 1/(1 - hL) > 1$ e che

$$\sum_{k=1}^n s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{s - 1} \leq \frac{s^{n+1}}{s - 1}$$

Ora

$$s - 1 = \frac{1}{1 - hL} - 1 = \frac{hL}{1 - hL} > 0 \quad (40)$$

e da $(1 + x)^k \leq \exp(kx)$ per $x > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} s^{n+1} &= (1 + (s - 1))^{n+1} \leq \exp((n + 1)(s - 1)) \\ &= \exp\left(\frac{hL(n + 1)}{1 - hL}\right) = \exp\left(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^n s^k \leq \frac{(1 - hL) \exp\left(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL}\right)}{hL}$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Così ricapitolando

$$|e_n| \leq h \left(\sum_{k=1}^n s^k \right) |\tau(h)| + s^n |e_0|,$$

$$\sum_{k=1}^n s^k \leq \frac{(1 - hL) \exp\left(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL}\right)}{hL}$$

$$s^n \leq \exp\left(\frac{L(x_n - x_0)}{1 - hL}\right),$$

implica finalmente

$$|e_n| \leq h \frac{(1 - hL) \exp\left(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL}\right)}{hL} |\tau(h)| + \exp\left(\frac{L(x_n - x_0)}{1 - hL}\right) |e_0|.$$

Analisi convergenza Eulero implicito, caso Lipschitziano

Notiamo che $\tau_n(h) = h|y''(\xi)|/2$ e che se y'' è continua per il teorema di Weierstrass $|y''|$ ha massimo nel compatto $[x_0, x_{\text{fin}}]$, diciamo M . Di conseguenza

$$\tau(h) = \max(\tau_n(h)) \leq Mh/2.$$

Ricordando che $|e_0| = 0$, che $x_{\text{fin}} = x_0 + Nh$ abbiamo

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq h \frac{(1 - hL) \exp(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL})}{hL} |\tau(h)| + \exp(\frac{L(x_n - x_0)}{1 - hL}) |e_0| \\ &\leq h \frac{(1 - hL) \exp(\frac{L(x_{n+1} - x_0)}{1 - hL})}{hL} \frac{Mh}{2} + \exp(\frac{L(x_{\text{fin}} - x_0)}{1 - hL}) |e_0| \\ &\leq \frac{(1 - hL) \exp(\frac{L(x_N - x_0) + hL}{1 - hL})}{L} \frac{Mh}{2} \end{aligned} \quad (42)$$

e quindi $|e_n| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, per cui Eulero implicito converge.

Predictor-corrector

In generale un metodo LM implicito ha proprietà di stabilità migliori rispetto ad un LM esplicito e questo ne suggerisce l'utilizzo.

Purtroppo ad ogni iterazione bisogna risolvere una equazione nonlineare.

Un approccio comunemente utilizzato è quello del [predictor-corrector](#). Consiste nell'utilizzare il metodo di punto fisso con una certa scelta del punto iniziale.

Nel caso di un metodo di Adams implicito (detto **corrector**), si utilizza ad esempio un metodo di Adams esplicito (detto **predictor**).

Esempio Predictor-corrector

Consideriamo i seguenti metodi di Adams (porremo $f_i = f(x_i, u_i)$).

$$\text{Predictor: } u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

$$\text{Corrector: } u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i).$$

Posto $f_i^{(\eta)} = f(x_i, u_i^{(\eta)})$ abbiamo

$$\text{P: } u_{i+1}^{(0)} = u_i^{(1)} + \frac{h}{2}(3f_i^{(1)} - f_{i-1}^{(1)})$$

$$\text{E: } f_{i+1}^{(0)} = f(x_{i+1}, u_{i+1}^{(0)})$$

$$\text{C: } u_{i+1}^{(1)} = u_i^{(1)} + \frac{h}{2}(f_{i+1}^{(0)} + f_i^{(1)})$$

$$\text{E: } f_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}, u_{i+1}^{(1)})$$

Runge-Kutta

Consideriamo un metodo numerico, che diremo di **Runge-Kutta** di ordine 2, che definisca una sequenza u_n t.c.

$$y(x_{n+1}) \approx u_{n+1} = u_n + hF(x_n, u_n; h)$$

con

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y))$$

e determiniamo i parametri $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta$ così da ottenere un metodo del second'ordine. Ricordiamo che questo significa che $\tau(h)$ sia $O(h^2)$. Per ottenere questo risultato usiamo la formula di Taylor bivariata. Denotate con f_x, f_y le derivate parziali rispetto al primo e secondo argomento di f , abbiamo

$$f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)) = f(x, y) + \alpha h f_x(x, y) + \beta h f_y(x, y) f(x, y) + O(h^2).$$

Runge-Kutta

Per definizione di errore locale di troncamento:

$$\tau(x, h) = (y(x + h) - u(x + h))/h$$

con $u(x + h)$ calcolata dal metodo qualora $u(x) = y(x)$. Da

$$f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)) = f(x, y) + \alpha h f_x(x, y) + \beta h f_y(x, y) f(x, y) + O(h^2).$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} F(x, y; h) &= \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)) \\ &= \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 (f(x, y) + \alpha h f_x(x, y) + \beta h f_y(x, y) f(x, y)) \\ &\quad + O(h^2). \end{aligned} \tag{43}$$

Runge-Kutta

Facilmente, dalla formula di Taylor

$$\begin{aligned}y(x+h) - y(x) &= hy^{(1)}(x) + (h^2/2)y^{(2)}(x) + O(h^3) \\&= hf(x, y) + (h^2/2)(f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)) \\&+ O(h^3) = \phi_1(x, h) + O(h^3)\end{aligned}\tag{44}$$

Ma è pure

$$\begin{aligned}u(x+h) - y(x) &= hF(x, y; h) = h(\gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 (f(x, y) \\&+ \alpha hf_x(x, y) + \beta hf_y(x, y)f(x, y))) + O(h^3) \\&= h(\gamma_1 + \gamma_2)f(x, y) + h^2\gamma_2(\alpha f_x(x, y) + \beta f_y(x, y)f(x, y))) \\&+ O(h^3) = \phi_2(x, h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta) + O(h^3)\end{aligned}\tag{45}$$

Runge-Kutta

Se

$$\phi_1(x, h) \equiv \phi_2(x, h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta)$$

allora da

$$y(x+h) - y(x) = \phi_1(x, h) + O(h^3)$$

$$u(x+h) - y(x) = \phi_2(x, h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta) + O(h^3)$$

sottraendo membro a membro

$$\begin{aligned} y(x+h) - u(x+h) &= (\phi_1(x, h) - \phi_2(x, h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta)) + O(h^3) \\ &= O(h^3) \end{aligned} \quad (46)$$

e quindi si determina un metodo avente ordine di consistenza 2, poichè $\tau_n(h) = O(h^2)$ per ogni n e quindi $\tau(h) = O(h^2)$.

Affinchè $\phi_1(x, h) = \phi_2(x, h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta)$, per confronto tra (43), (44), (45), necessita

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \gamma_2\alpha = 1/2, \gamma_2\beta = 1/2.$$

Runge-Kutta

Vediamo alcuni metodi in cui

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_2\alpha = 1/2, \quad \gamma_2\beta = 1/2.$$

Metodo di **Heun** ($\alpha = 1$), (scoperto nel 1900):

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(x_n, u_n) + f(x_n + h, u_n + hf(x_n, u_n))).$$

Metodo di **Eulero modificato** ($\alpha = 1/2$):

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f(x_n, u_n)).$$

Runge-Kutta

La scelta particolare di un maggior numero di vincoli permette, con qualche fatica, di calcolare un metodo di ordine 4 (scoperto da Kutta nel 1901). Posto

$$u_{n+1} = u_n + h \cdot \frac{f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4}{6}$$

ove

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_n, u_n) \\ f_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h \cdot f_1}{2}\right) \\ f_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f_2\right) \\ f_4 &= f(t_n + h, u_n + h \cdot f_3) \end{aligned} \tag{47}$$

si ottiene un metodo del quart'ordine.

Bibliografia



K. Atkinson e W. Han, *Elementary Numerical Analysis*, Wiley, (2004).



K.E. Atkinson, W. Han, D.E. Steward *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Wiley, (2009).



V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.



W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Birkhäuser, second edition, 2012.